

Percolation et modèles de dimères

Vincent Beffara

Journées MAS, 29 août 2016, Grenoble

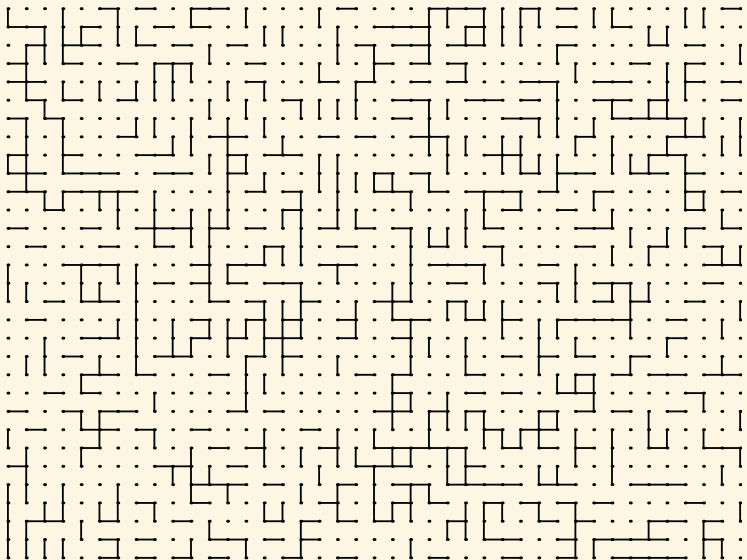
Outline

- 1 Introduction : modèles percolatifs
 - Percolation de Bernoulli
 - Quelques méthodes
 - Variantes du modèle
- 2 Modèles de dimères
 - Pavage uniforme
 - Comportement asymptotique
- 3 Le modèle bi-périodique
 - Periodic weights
 - Forme asymptotique et diagramme de phase
 - Une étape clef de la preuve

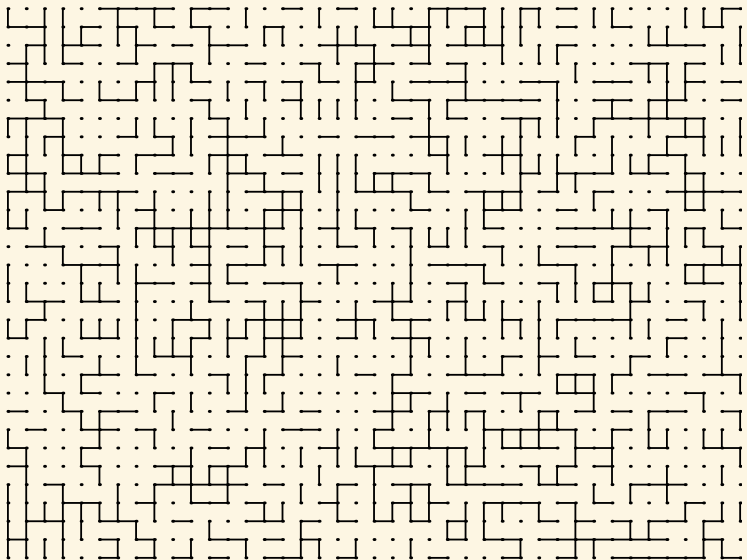
Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2

- On fixe un paramètre $p \in (0, 1)$
- On définit un **sous-graphe aléatoire** G_p de \mathbb{Z}^2 en gardant chaque arête indépendamment avec probabilité p
- On s'intéresse aux **composantes connexes** $C(x)$ de G_p
- La probabilité de percolation est $\theta(p) = P[|C(0)| = \infty]$
- Le **paramètre critique** est $p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$

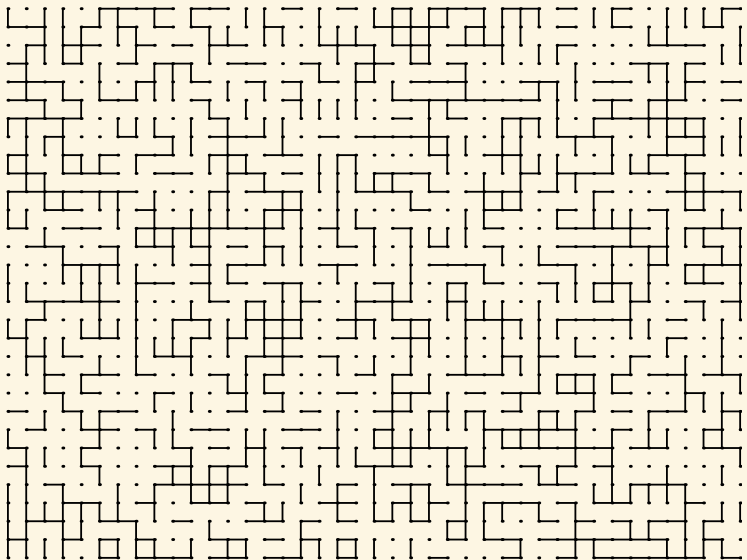
Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 ($p = 0.3$)



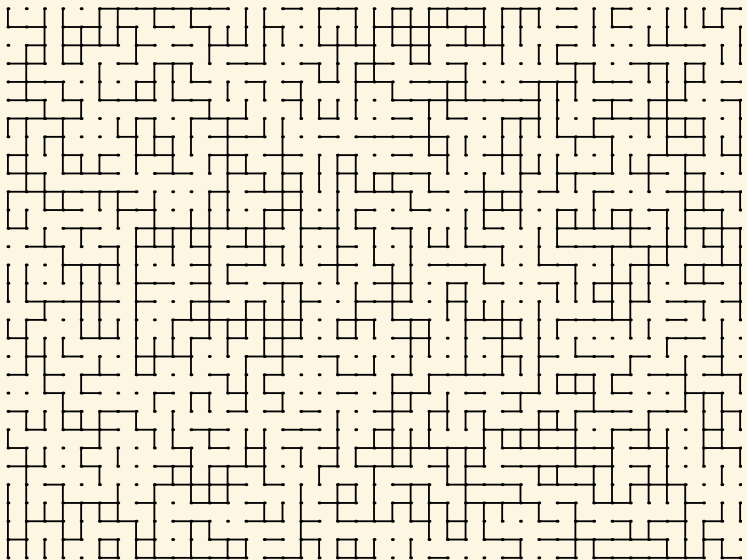
Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 ($p = 0.4$)



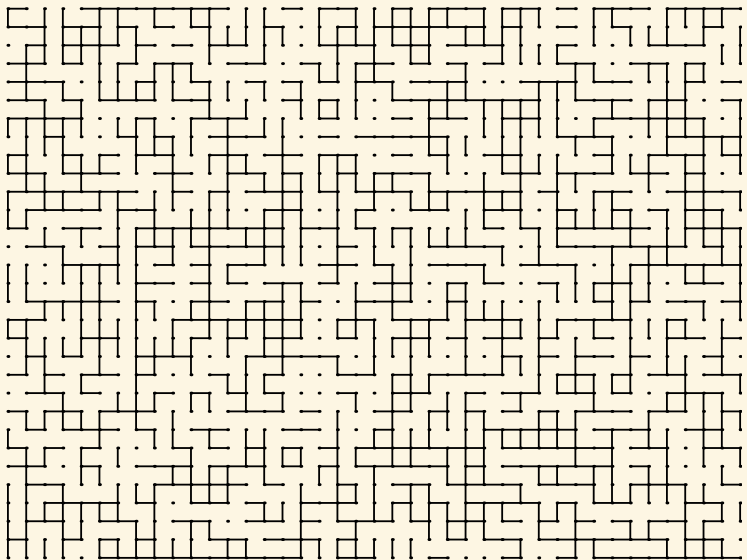
Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 ($p = 0.45$)



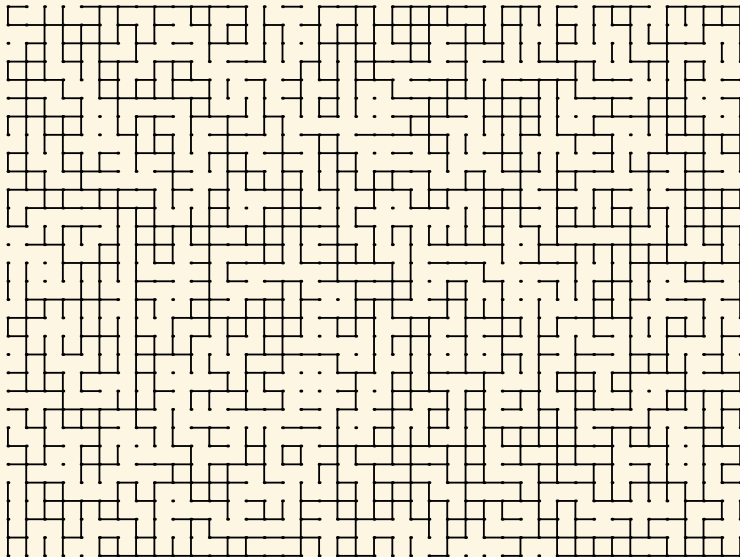
Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 ($p = 0.5$)

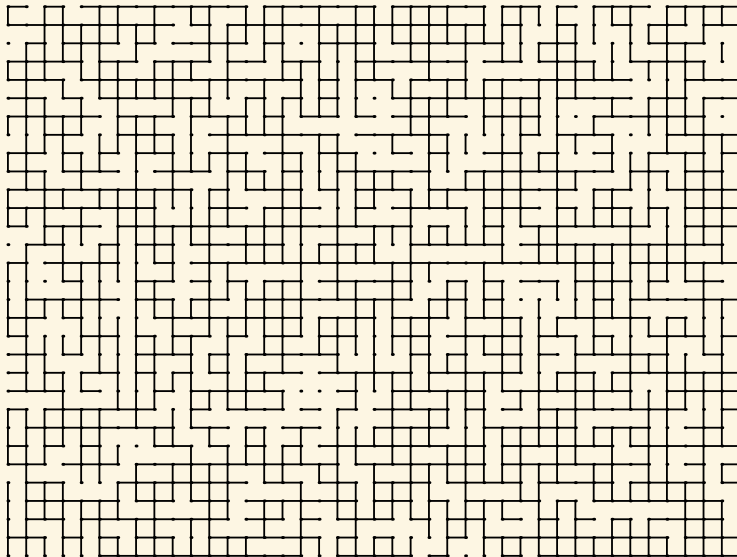


Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 ($p = 0.55$)



Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 ($p = 0.6$)



Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 ($p = 0.7$)

Percolation de Bernoulli sur \mathbb{Z}^2 : résultats classiques

- Kesten (1980) : $p_c = 1/2$
- Pour $p < p_c$, régime **sous-critique** :
 - Tous les clusters sont finis p.s.
 - $P[0 \longleftrightarrow x] \approx \exp(-\lambda_p \|x\|)$
 - Le plus grand cluster dans Λ_n a pour diamètre $\approx \log n$
- Pour $p > p_c$, régime **sur-critique** :
 - Il existe p.s. un unique cluster infini
 - $P[0 \longleftrightarrow x, |C(x)| < \infty] \approx \exp(-\lambda_p \|x\|)$
 - Le plus grand cluster *fini* dans Λ_n a pour diamètre $\approx \log n$
- Pour $p = p_c$, régime **critique** :
 - Tous les clusters sont finis p.s.
 - $P[0 \longleftrightarrow x] \approx \|x\|^{-5/24}$
 - Le plus grand cluster dans Λ_n a pour diamètre $\approx n$

Monotonie / couplage

On peut coupler deux configurations pour des paramètres $p_1 < p_2$ de telle sorte que toute arête ouverte sous p_1 le soit aussi sous p_2 .

Conséquence : la fonction θ est croissante.

Argument de Peierls

Il s'agit de l'argument utilisé pour prouver que $p_c > 0$: si $p < 1/4$,

$$P_p[0 \longleftrightarrow \infty] = \lim_{L \rightarrow \infty} P_p[\exists \gamma \text{ ouvert issu de } 0, |\gamma| = L] \quad (1)$$

$$\leq \lim_{L \rightarrow \infty} E_p[\text{nombre de tels chemins}] \quad (2)$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma|=L} P_p[\gamma \text{ ouvert}] \quad (3)$$

$$= \lim_{L \rightarrow \infty} 4^L p^L = 0 \quad (4)$$

Donc $\theta(p) = 0$, ce qui montre que $p_c \geq 1/4$. Par la même méthode on obtient $P[0 \longleftrightarrow x] \leq (4p)^{\|x\|}$, donc la décroissance exponentielle.

Changement de réseau

- Percolation sur \mathbb{Z}^d , sur d'autres réseaux réguliers
- Percolation par sites
- Paramètres dépendant de l'arête
- Sur des graphes aléatoires (Poisson-Voronoi, gravité quantique)
- ...

Modèles dépendants

On peut remplacer la mesure produit par une mesure plus compliquée sur les sous-graphes d'un graphe (fini) fixé. La plus courante est la mesure de Fortuyn-Kasteleyn :

$$P[\omega] = \frac{1}{Z} p^{o(\omega)} (1-p)^{f(\omega)} q^{k(\omega)}$$

Cette mesure est liée au modèle de Potts (ou d'Ising pour $q = 2$) de température inverse β satisfaisant $e^{-\beta} = 1 - p$, par le **couplage de Edwards-Sokal**.

Percolation dirigée (O. Garet)

Dans cette variante, on garde le même modèle mais on restreint la notion de connection en définissant

$$P[0 \longrightarrow x] = P[\exists \gamma \text{ croissant de } 0 \text{ à } x]$$

Modèle booléen (J.-B. Guéré)

Il s'agit d'un modèle **continu** sur \mathbb{R}^d , obtenu à partir d'un processus de Poisson \mathcal{X} en définissant

$$K = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{B}(x, r)$$

On s'intéresse aux mêmes questions pour l'ensemble K : existence de composantes connexes non bornées, probabilités de connexions entre points distincts ...

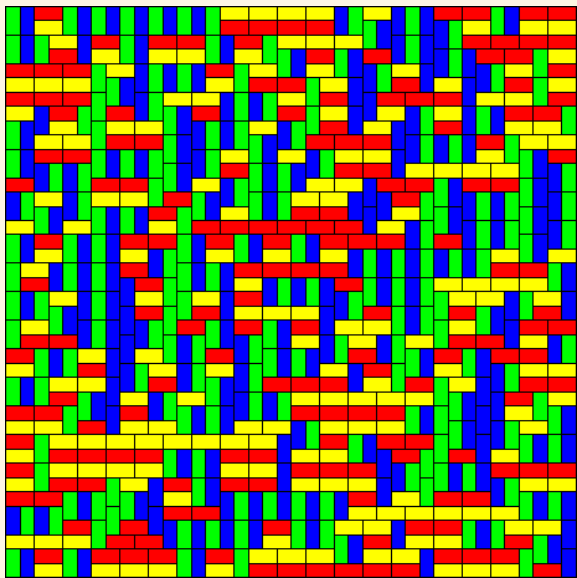
Percolation paire (I. Marcovici)

On peut considérer des **modèles contraints** par des restrictions de probabilité nulle pour la percolation de Bernoulli.

Par exemple, la percolation conditionnée à avoir un nombre pair d'arêtes ouvertes autour de chaque site.

L'existence même de mesure(s) en volume infini n'est pas toujours évidente.

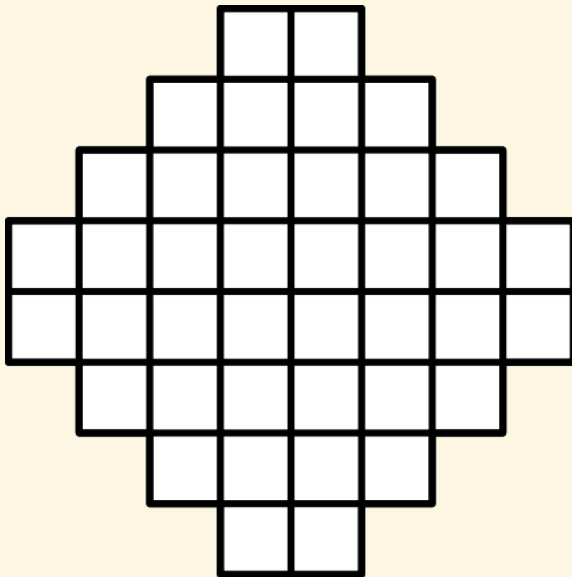
Pavage uniforme par dimères (sur un carré $L \times L$)



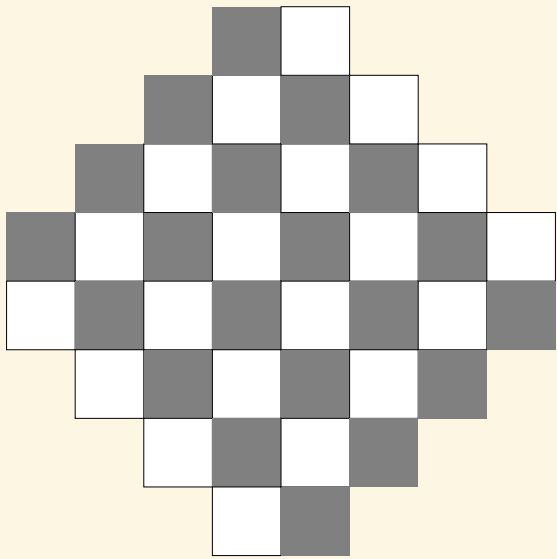
Quelques résultats

- Le nombre de pavages (pour L pair) vaut $\approx \exp(cL^2)$ pour $c > 0$, appelé **énergie libre**
- Les corrélations entre différents dominos sont explicites, en termes de la **matrice de Kasteleyn** ; elles décroissent comme une puissance de la distance
- On peut simuler une configuration selon cette mesure par la **dynamique de flip**
- L'ergodicité de la dynamique provient de l'existence de la **fonction de hauteur**

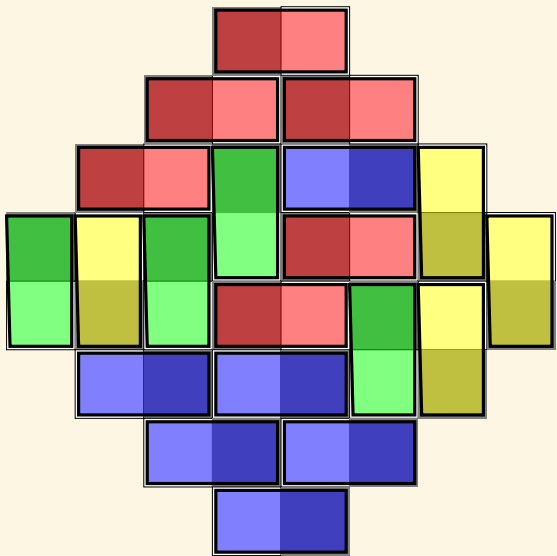
Le "diamant aztèque"



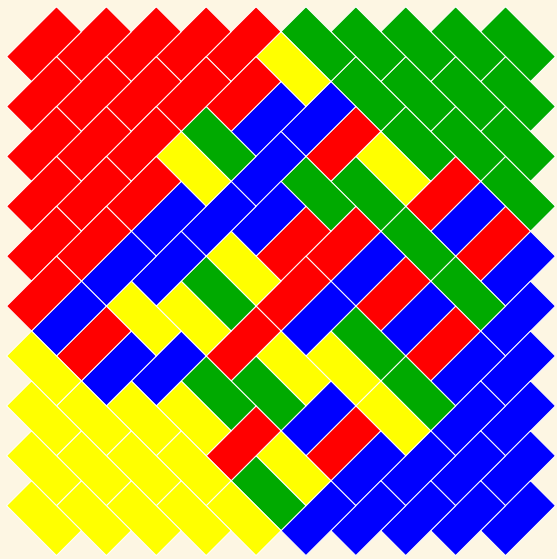
Le "diamant aztèque" est biparti



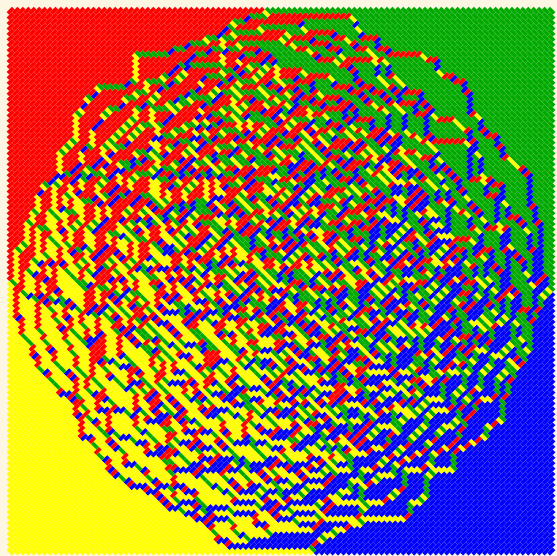
Le "diamant aztèque" est biparti et pavable



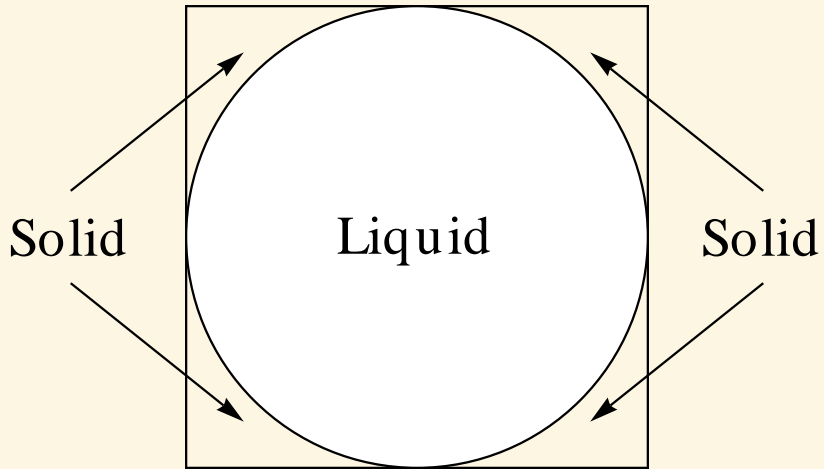
Sur un grand diamant aztèque



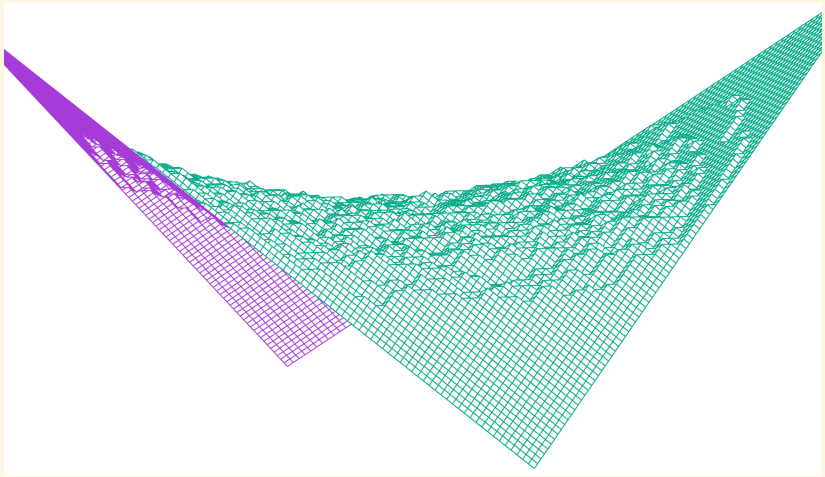
Sur un très grand diamant aztèque



Forme asymptotique quand $L \rightarrow \infty$



Forme asymptotique de la fonction de hauteur



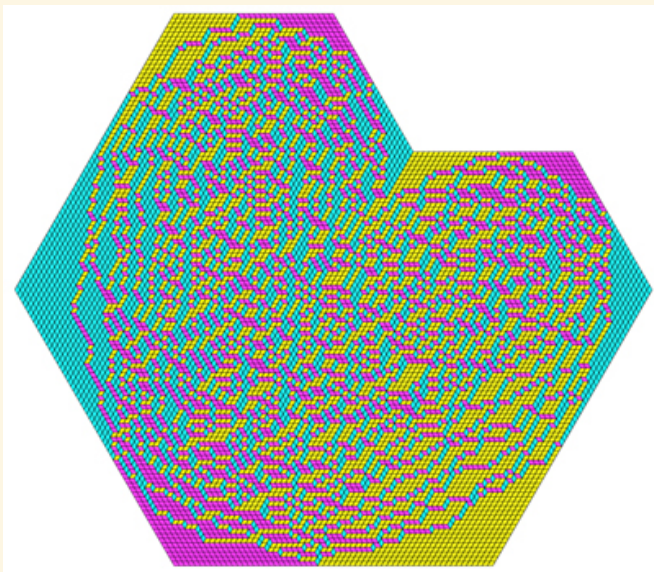
Étapes de la preuve

- Calculer l'énergie libre pour une pente donnée
- Résoudre le problème variationnel correspondant

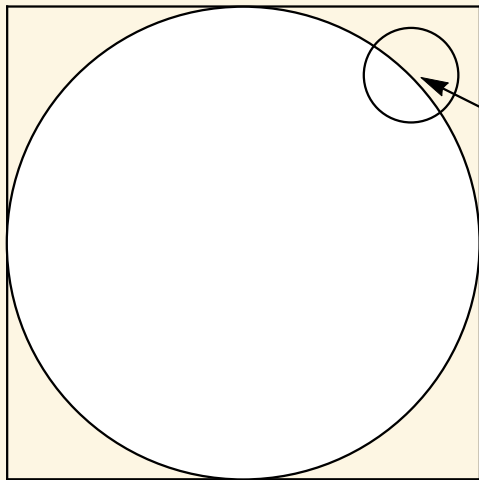
Référence: Kenyon–Okounkov–Sheffield, *Dimers and Amoeba*

La preuve fonctionne en toute généralité pour des réseaux périodiques bipartis, même munis de poids (périodiques). On obtient des interfaces qui sont des courbes algébriques.

Application sur un polygone

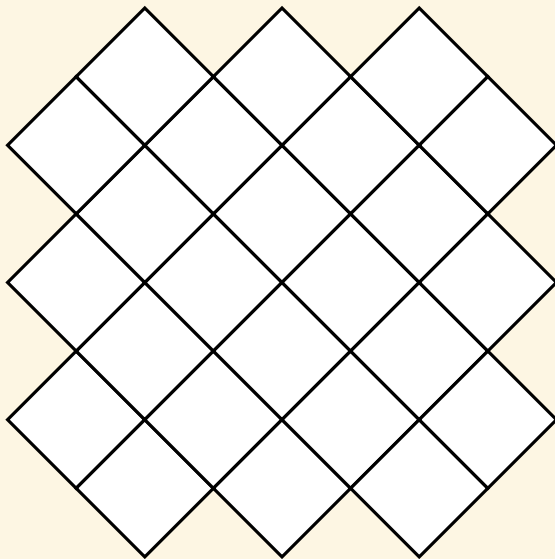


Fluctuations

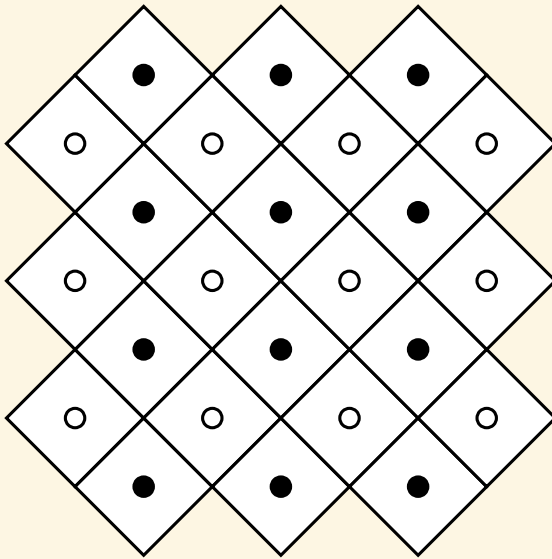


Airy Process

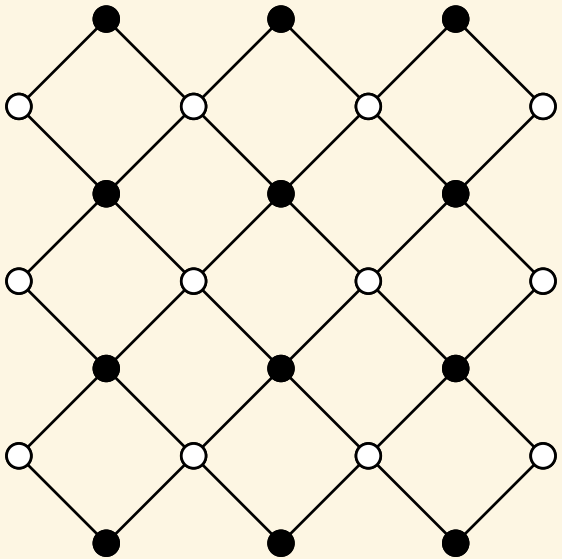
Codage par dimères



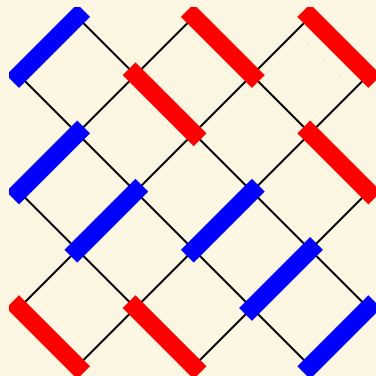
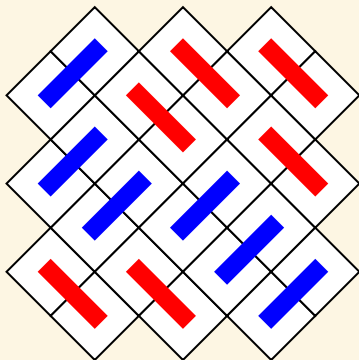
Codage par dimères



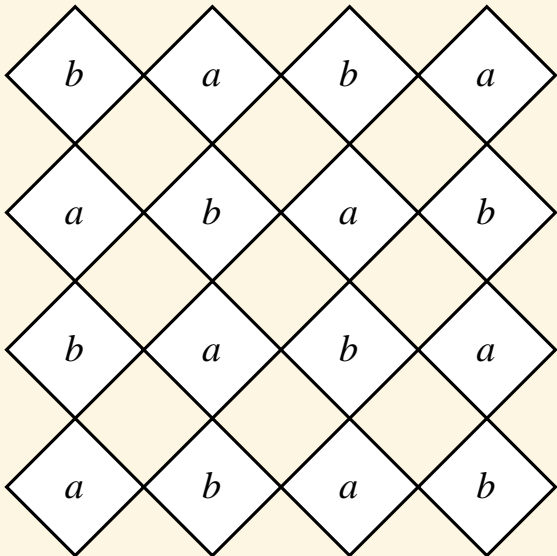
Codage par dimères



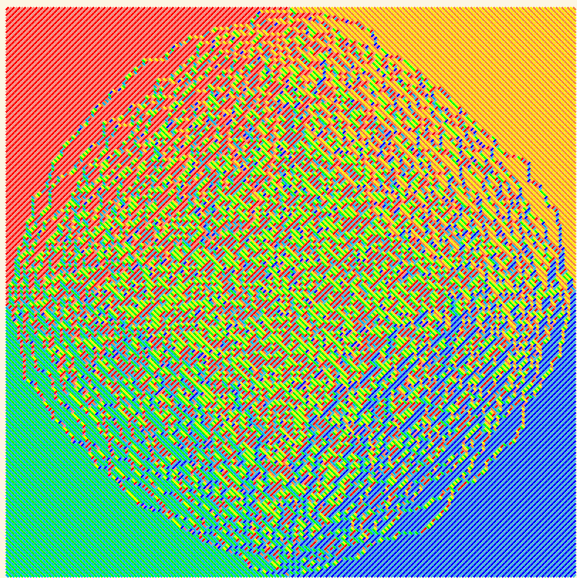
Codage par dimères



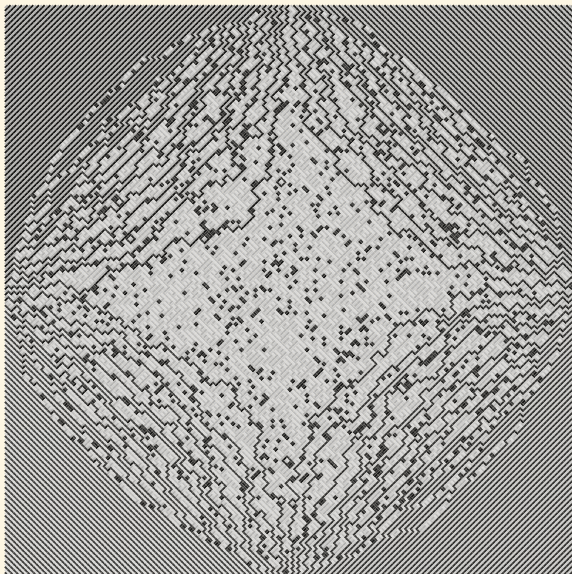
Poids bi-périodiques



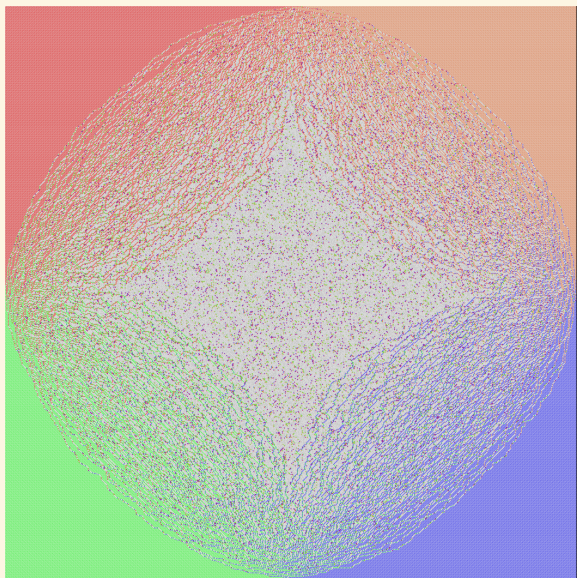
Poids bi-périodiques ($a = 1/2$)



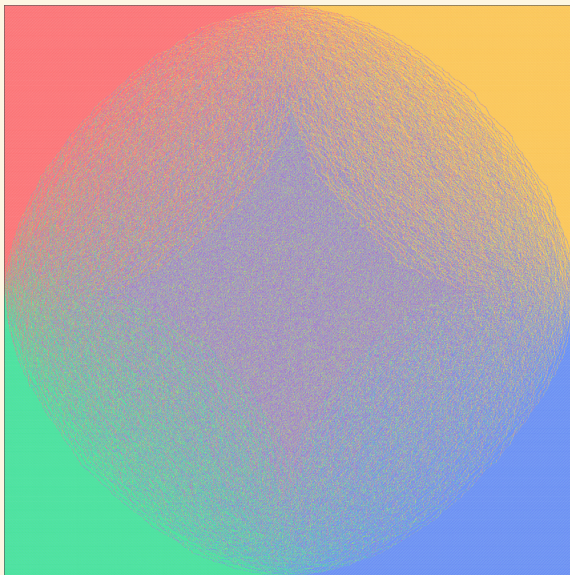
Poids bi-périodiques ($a = 1/2$)



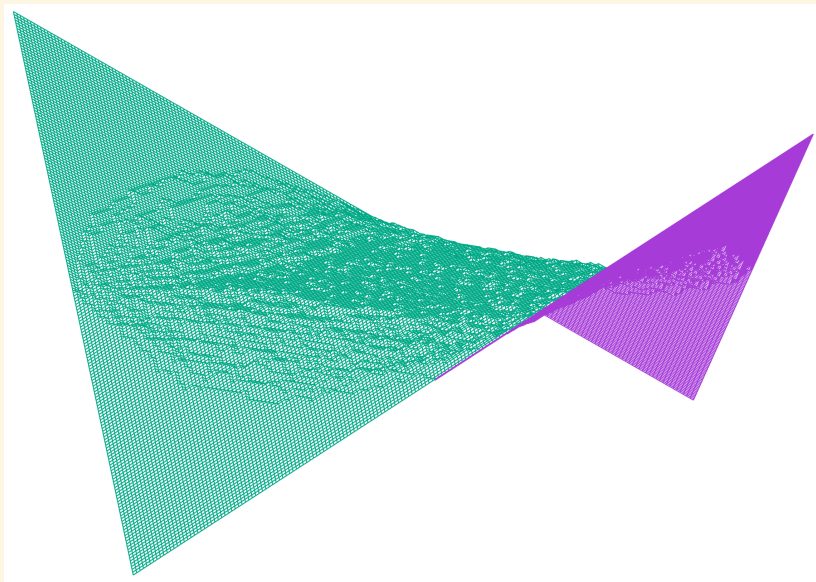
Plus grand domaine (toujours $a = 1/2$)



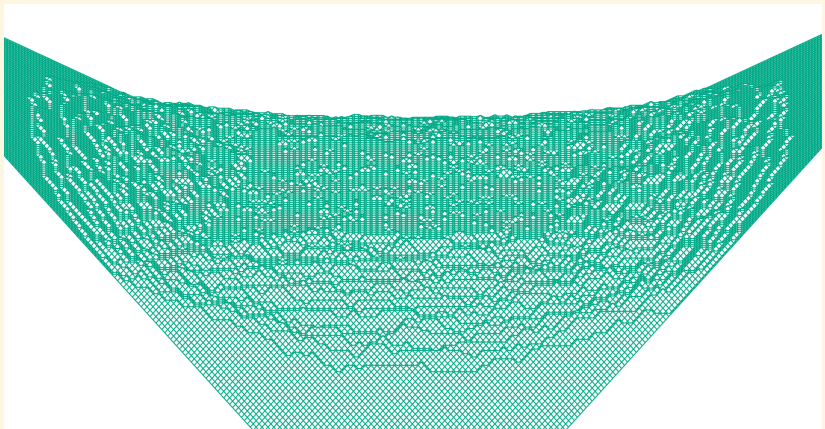
Encore plus grand domaine (toujours $a = 1/2$)



Fonction de hauteur asymptotique



Fonction de hauteur asymptotique



Fonction de hauteur asymptotique

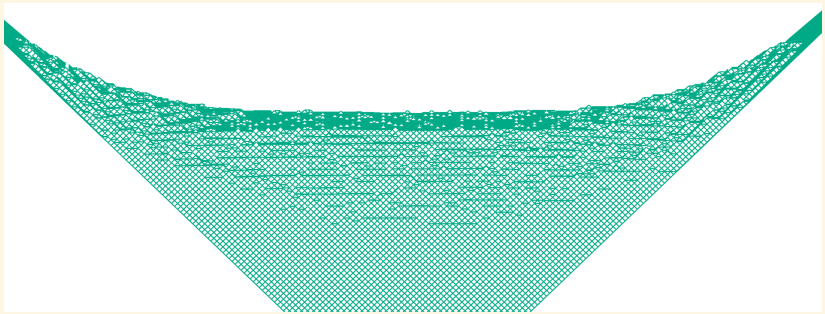
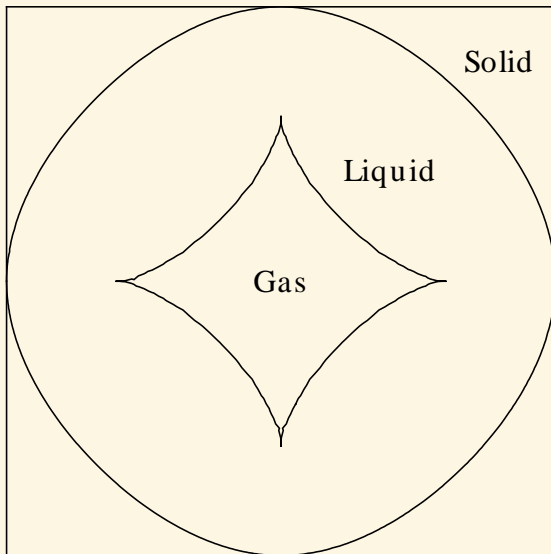


Diagramme de phase



Quelques résultats

Il y a 3 phases, avec des comportements distincts :

- Une phase **solide** ordonnée, où la pente est maximale,
- Une phase **liquide** désordonnée, avec corrélations polynomiales,
- Une phase **gazeuse** avec décroissance exponentielle et pente nulle.

L'interface est une courbe algébrique de degré 8.

Les fluctuations à l'interface solide/liquide sont les mêmes que dans le cas uniforme.

Quelques résultats

Il y a 3 phases, avec des comportements distincts :

- Une phase **solide** ordonnée, où la pente est maximale,
- Une phase **liquide** désordonnée, avec corrélations polynomiales,
- Une phase **gazeuse** avec décroissance exponentielle et pente nulle.

L'interface est une courbe algébrique de degré 8.

Les fluctuations à l'interface solide/liquide sont les mêmes que dans le cas uniforme.

Question : que se passe-t-il à l'interface liquide/gaz ?

Réponse : la limite est la même

La difficulté principale

Pour appliquer les méthodes habituelles, il faut contrôler précisément l'interface à l'échelle microscopique ; même la définition des chemins n'est pas claire.

Cela vient de la nature désordonnée de la phase gazeuse, que l'on peut contrôler par un argument "de type Peierls" :

Théorème (B, Chhita, Johansson)

Pour tout a assez petit, il existe $C(a) < \infty$ tel que, avec probabilité tendant vers 1 quand $L \rightarrow \infty$, toutes les composantes connexes de dimères "de type a " ne touchant pas le bord du domaine soient de diamètre inférieur à $C(a) \log L$.

En d'autres termes, la phase gazeuse ressemble au régime sous-critique de la percolation.

Idée de la preuve

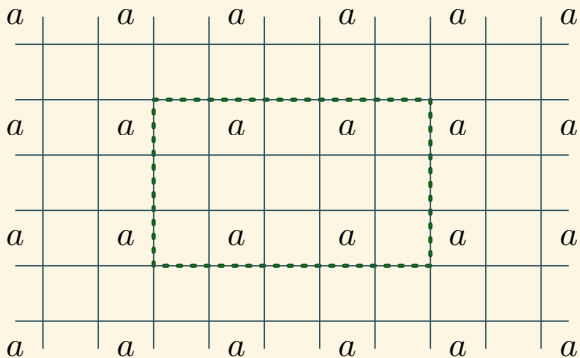
Lemme

Soit γ un chemin fermé : la probabilité qu'il soit entièrement recouvert par des dimères "de type a" est au plus $a^{|\gamma|/2}$.

Idée de la preuve

Lemme

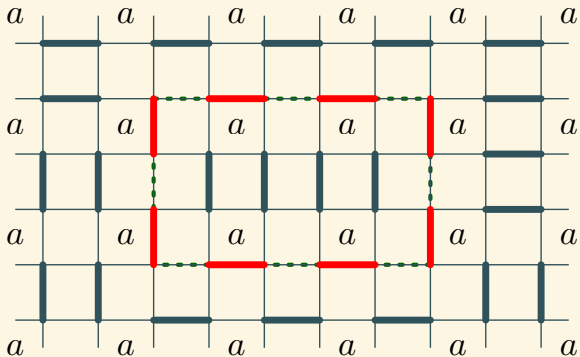
Soit γ un chemin fermé : la probabilité qu'il soit entièrement recouvert par des dimères "de type a " est au plus $a^{|\gamma|/2}$.



Idée de la preuve

Lemme

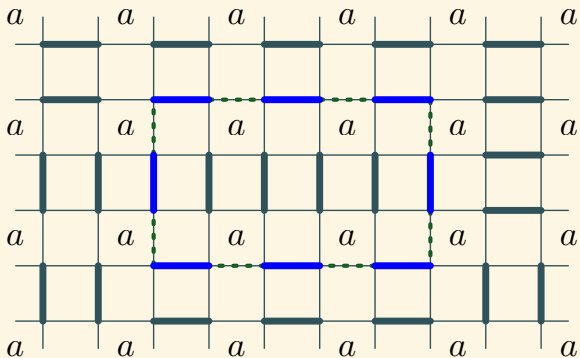
Soit γ un chemin fermé : la probabilité qu'il soit entièrement recouvert par des dimères "de type a" est au plus $a^{|\gamma|/2}$.



Idée de la preuve

Lemme

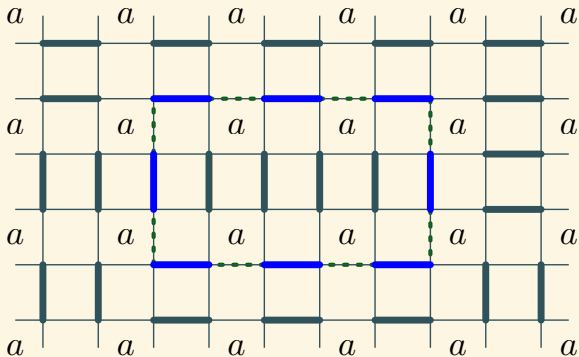
Soit γ un chemin fermé : la probabilité qu'il soit entièrement recouvert par des dimères "de type a" est au plus $a^{|\gamma|/2}$.



Idée de la preuve

Lemme

Soit γ un chemin fermé : la probabilité qu'il soit entièrement recouvert par des dimères "de type a" est au plus $a^{|\gamma|/2}$.



$$P[\omega] \leq P[\omega \Delta \gamma] a^{|\gamma|/2}$$