

Le nombre de chemins en percolation orientée

Olivier Garet,
en commun avec Régine Marchand et Jean-Baptiste Gouéré.

MAS 2016, Grenoble.

Institut Élie Cartan,
Université de Lorraine, Nancy, France.



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

Institut

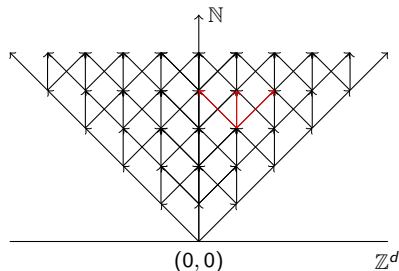
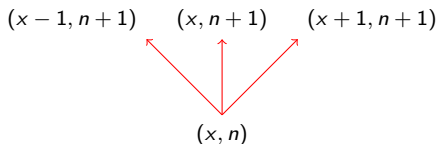


ELIE CARTAN

Percolation orientée en dimension $d + 1$

Le graphe orienté $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$.

Chaque sommet a $2d + 1$ enfants:



Le graphe aléatoire.

Sous la mesure produit de Bernoulli \mathbb{P}_p , chaque arête est gardée avec probabilité $p \in (0, 1)$, de manière indépendante.

Quelques dessins

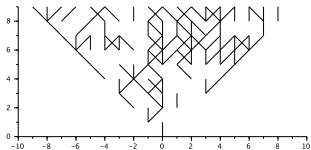
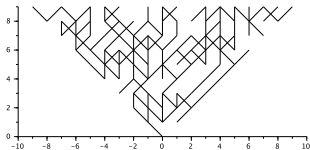
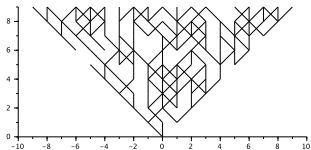
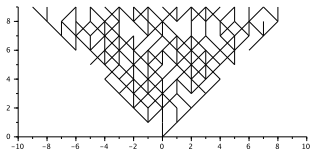
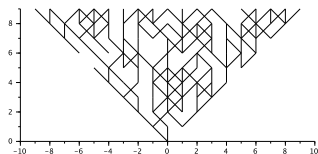


Figure: Exemples avec $p = 0.7, 0.6, 0.5, 0.4$.

Percolation orientée en dimension $d + 1$

Transition de phase:



Existence de chemins ouverts infinis
? $\Omega_\infty = \{(0,0) \rightarrow \infty\}$

$$\mathbb{P}_p(\Omega_\infty) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > \vec{p}_c(d+1).$$

Deux questions naturelles:

1 Où vont les chemins ?

$$\xi_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : (0,0) \rightarrow (x,n)\}.$$

\rightsquigarrow Théorème de forme asymptotique pour ξ_n .

2 Combien de chemins ouverts jusqu'une hauteur donnée, vers un point donné ?

Vu du dessus: la forme asymptotique ($p > \vec{p}_c(d+1)$)

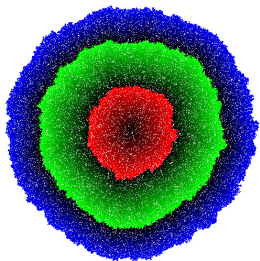


Figure: forme asymptotique,
couleur = temps d'atteinte

- $\xi_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : (0, 0) \rightarrow (x, n)\}$.
- Temps d'atteinte :
 $t(x) = \inf\{n \geq 0 : x \in \xi_n\}$.
- Points atteints :
 $H_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq n\}$.
 $(H_n)_n$: suite croissante d'ensembles aléatoires.

Théorème (Forme asymptotique)

On note $\bar{\mathbb{P}}_p = \mathbb{P}_p(\cdot | \Omega_\infty)$. Il existe une norme μ_p sur \mathbb{R}^d (boule unité: A_{μ_p}), telle que

$$\bar{\mathbb{P}}_p \left(\exists N > 0 \quad \forall n \geq N \quad (1 - \varepsilon)A_{\mu_p} \subset \frac{H_n + [0, 1]^d}{n} \subset (1 + \varepsilon)A_{\mu_p} \right) = 1.$$

Le nombre de chemins ouverts en percolation orientée

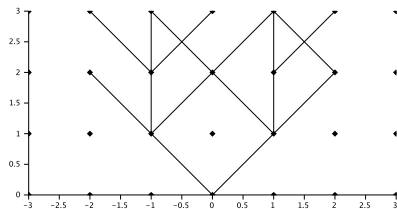


Figure: $n = 3$, $p = 0.6$.

$N_{x,n}$: nombre de chemins de $(0, 0)$ à (x, n)

$$N_n = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} N_{x,n}$$

nombre de chemins de $(0, 0)$ au niveau n .

$$N_{x,n+1} = \sum_{\|y-x\| \leq 1} \mathbf{1}_{(y,n) \rightarrow (x,n+1)} N_{y,n}$$

Question

Comportement de N_n ?

Le nombre de chemins: comportement moyen et martingale

- Comportement moyen: $\mathbb{E}_p(N_n) = (2d + 1)^n p^n$;

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{E}_p(N_n) = \log((2d + 1)p).$$

- $\left(\frac{N_n}{((2d + 1)p)^n} \right)$ est une martingale positive: [Darling 91]

$$\exists W \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n}{((2d + 1)p)^n} = W \quad \mathbb{P}_p - a.s.$$

- sur l'événement $\{W > 0\}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_n = \log((2d + 1)p)$.

Sur $\{W > 0\}$, $(N_n)_n$ a la même croissance exponentielle que $(\mathbb{E}_p(N_n))_n$.

Problème

Souvent, $W = 0$.
Que dire alors ?

[Yoshida 08, Lacoïn 02]

Le théorème principal

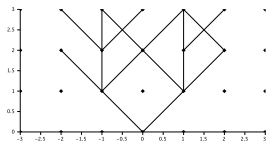


Figure: $n = 3$, $p = 0.6$.

$N_{x,n}$: nombre de chemins ouverts
de $(0,0)$ à (x,n)

$N_n = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} N_{x,n}$: nombre de chemins ouverts
de $(0,0)$ au n .

Theorem (Garet–Gouéré–Marchand)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_n = \tilde{\alpha}_p(0) \quad \overline{\mathbb{P}}_p - a.s.$$

Stratégie :

- 1 Dans un ensemble dense de directions, trouver une infinité de points pour lesquels $N_{x,n}$ est contrôlé.
- 2 Utiliser la zone couplée de la percolation orientée retournée pour contrôler les fluctuations.

Sous-additivité

Soit a, b, c avec $a \rightarrow b \rightarrow c$ dans $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$:

$$N_{a,c} \geq N_{a,b} N_{b,c}$$

$$(-\log N_{a,c}) \leq (-\log N_{a,b}) + (-\log N_{b,c}).$$

- sous-additivité
- stationarité : $N_{b,c} \sim N_{0,c-b}$
- intégrabilité: N_x intégrable ? (Hum...)

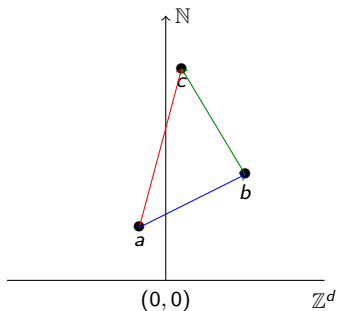
$$\left(\frac{1}{n} \log N_n \right)_n \text{ devrait converger.}$$

Ca sent le théorème ergodique sous-additif!

[Kingman 68,73;

Hammersley 74...]

Mais il faut choisir des points aléatoires a, b, c de manière à avoir des intégrabilités et conserver des bonnes stationnarités.



Le temps d'atteinte essentiel

[Garet–Marchand 12]

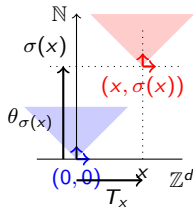
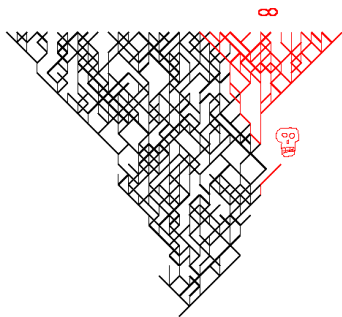
On note $\bar{\mathbb{P}}_p(\cdot) = \mathbb{P}_p(\cdot | \Omega_\infty)$.

Propriétés géométriques:

- $(0, 0) \rightarrow (x, \sigma(x)) \rightarrow +\infty$;
- $\sigma(x)$ est proche de $t(x)$:
 $\forall p > 0$
 $\sup \bar{\mathbb{E}}_p(|\sigma(x) - t(x)|^p) < +\infty$.
- $\frac{\sigma(x)}{\mu(x)} \rightarrow 1$ ($\bar{\mathbb{P}}_p$ - p.s., L^1)
quand $\|x\| \rightarrow +\infty$

Sur les lois:

- $\bar{\mathbb{P}}_p$ est **invariant** sous $\tilde{\theta}_x = T_x \circ \theta_{\sigma(x)}$;
- Sous $\bar{\mathbb{P}}_p$, $\sigma(x)$ est indépendant du triangle rose



Limites directionnelles

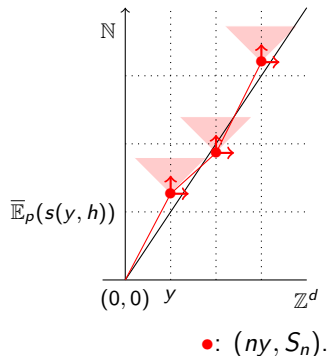
$(y, h) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*$. $\hat{\theta} = \tilde{\theta}_0^h \circ \tilde{\theta}_y$, **temps associé** $s(y, h)$.

- $(0, 0) \rightarrow (y, s(y, h)) \rightarrow \infty$;
- $\bar{\mathbb{P}}_p$ est invariant par $\hat{\theta}$;
- $(s(y, h) \circ (\hat{\theta}^j))_{j \geq 0}$ sont iid intégrables.

Itération : Des points d'appui dans une direction

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} s(y, h) \circ \hat{\theta}^k \sim n \bar{\mathbb{E}}_p(s(y, h)).$$

- $(0, 0) \rightarrow (y, S_1) \rightarrow (2y, S_2) \rightarrow \dots$
- $N_{(ny, S_n)} \cdot N_{(py, S_p)} \circ \hat{\theta}^n \leq N_{((n+p)y, S_{n+p})}$.
- $0 \leq \log N_{(ny, S_n)} \leq S_n \log(2d + 1)$.



Le **théorème ergodique sous-additif** s'applique à $f_n = -\log N_{(ny, S_n)}$:

$$\exists \alpha_p(y, h) > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n(y, h)} \log N_{(ny, S_n)} = \alpha_p(y, h) \quad \bar{\mathbb{P}}_p - p.s.$$

Limites Directionnelles: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_n(y, h)} \log N_{(ny, S_n)} = \alpha_p(y, h)$.

Les directions $(y, \overline{\mathbb{E}}_p(s(y, h)))$ sont denses dans le cône de percolation.

Contribution maximale: $\alpha_p = \sup \{ \alpha_p(y, h) : (y, h) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^* \}$.

- 1 On se ramène à \overline{N}_n , qui compte les chemins qui débutent un chemin infini.

Avantage: \overline{N}_n est croissant.

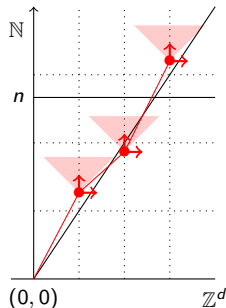
- 2 Partie facile: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \overline{N}_n \geq \alpha_p$.

\rightsquigarrow monotonie de $\overline{N}_n + S_n(y, h)$ peu espacés.

- 3 Partie difficile: $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \overline{N}_n \leq \alpha_p$.

\rightsquigarrow montrer que l'essentiel des chemins passe par nos points de contrôle.

\rightsquigarrow utiliser la zone couplée

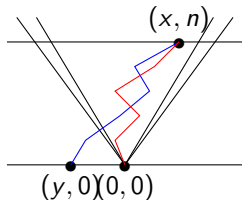


Couplage dans le cône de percolation

Un problème de chaîne de Markov

$$\begin{cases} \xi_0 \subset \mathbb{Z}^d, \\ \xi_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \exists x_0 \in \xi_0 : (x_0, 0) \rightarrow (x, n)\}. \end{cases}$$

Comment ξ_n dépend-t-il de la configuration initiale ξ_0 ?



Zone couplée. K_n^0 est l'ensemble des points qui sont dans le même état que l'on parte de $\xi_0 = \{0\}$ ou de $\xi_0 = \mathbb{Z}^d$.

Ainsi, si $x \in K_n^0$, et $\exists y$ tel que $(y, 0) \rightarrow (x, n)$, alors $(0, 0) \rightarrow (x, n)$.

Théorème (Théorème de forme de la zone couplée)

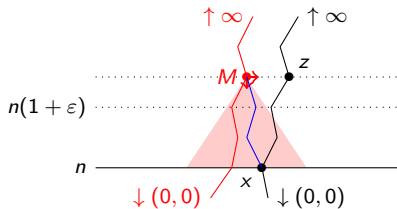
$$\mathbb{P}_p \left(\exists N \forall n \geq N \quad (1 - \varepsilon)A_{\mu_p} \subset \frac{(H_n \cap K_n^0) + [0, 1]^d}{n} \subset (1 + \varepsilon)A_{\mu_p} \right) = 1.$$

Autrement dit: un point suffisamment élevé qui est strictement à l'intérieur du cône de percolation et qui est atteint depuis un certain $(x, 0)$ est atteint depuis $(0, 0)$.

La zone couplée retournée

But: Montrer que toutes les contributions à \bar{N}_n sont comptées dans le $N_{x,m}$ d'un point de contrôle proche.

Le chemin noir contribue à $\bar{N}_{(x,n)}$:

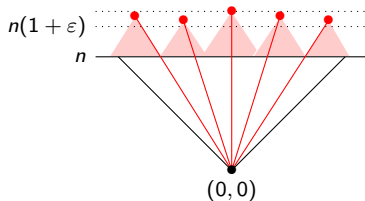


- M est un point de la suite associée à (y, h) .
- En rose: la zone couplée retournée K issue de M .
- On repart de M :
 $x \in K$ et $z \rightarrow x$: donc $M \rightarrow x$!

$$\text{Donc } \bar{N}_{(x,n)} \leq \bar{N}_M.$$

Approximation par D directions:

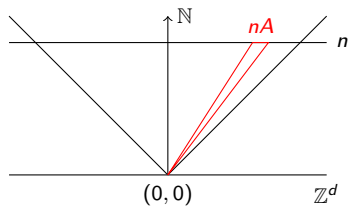
\rightsquigarrow Le niveau n est recouvert par les D zones couplées:



$$\bar{N}_n \leq \sum_{\bullet} \bar{N}_{\bullet}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \bar{N}_n \leq \alpha_p.$$

Convergence directionnelle



$$N_{nA,n} = \sum_{x \in nA} N_{x,n}$$

Theorem (Garet–Gouéré–Marchand 15)

Il existe une fonction concave $\tilde{\alpha}_p$ telle que pour les “bons” ensembles A

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_{nA,n} = \sup_{x \in A} \tilde{\alpha}_p(x) \quad \bar{\mathbb{P}}_p - a.s.$$

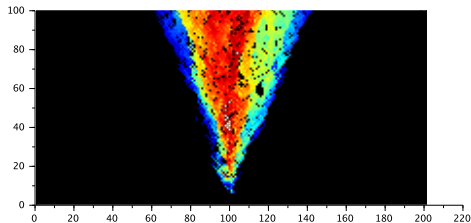


Figure: La couleur du pixel (x, k) est proportionnelle à $\frac{1}{k} \log N_{x,k}$.

Ce que dit la littérature

Rappel: sur $\{W > 0\}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_n = \log((2d+1)p)$.

- il est possible que $\mathbb{P}_p(\Omega_\infty) > 0$ et $\mathbb{P}_p(W = 0) = 1$:

[dimension 1 et 2: Yoshida 08]

- il est possible que, dans la phase surcritique de percolation,

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_n < \log((2d+1)p)$ pour certains p ,

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_n = \log((2d+1)p)$ pour des p plus grands.

[avec de grands voisinages, et d assez grand: Lacoïn 12]

Question

Comportement asymptotique de $\frac{1}{n} \log N_n$ sur l'événement de percolation ?

On note $\overline{\mathbb{P}}_p(\cdot) = \mathbb{P}_p(\cdot | \Omega_\infty)$.