Percolation paire sur $\mathbb{Z}^2$

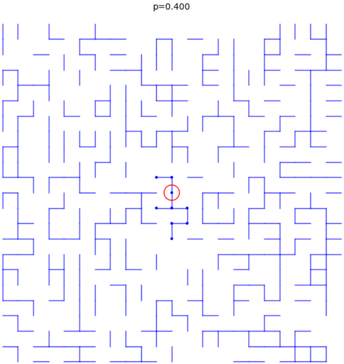
Irène Marcovici

Travail commun avec **Régine Marchand** et **Olivier Garet**

Institut Élie Cartan de Lorraine, Univ. de Lorraine, Nancy

Journées MAS, Grenoble
Lundi 29 août 2016

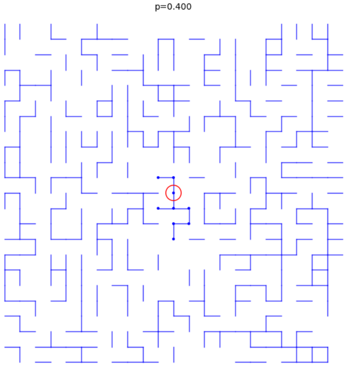
Modèle classique de percolation par arêtes

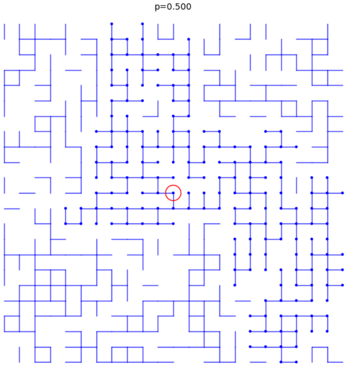


$\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_2}$ $\qquad$ $\mathbb{E}_2 =$ ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^2$

$(\omega_e)_{e\in\mathbb{E}_2}$ i.i.d. loi Ber(p) $\qquad$ $\omega_e = 1$ si l'arête e est coloriée en bleu

Modèle classique de percolation par arêtes





$\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_2}$

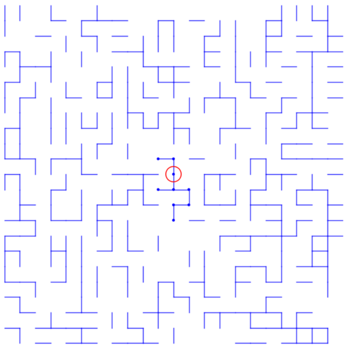
$(\omega_e)_{e\in\mathbb{E}_2}$ i.i.d. loi Ber(p)

$\mathbb{E}_2$ = ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^2$

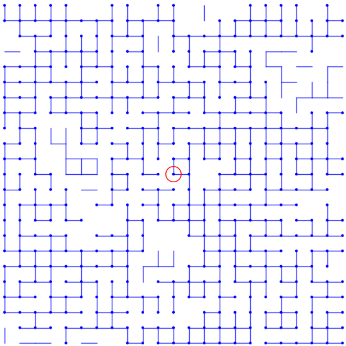
$\omega_e = 1$ si l'arête e est coloriée en bleu

Modèle classique de percolation par arêtes

p=0.400



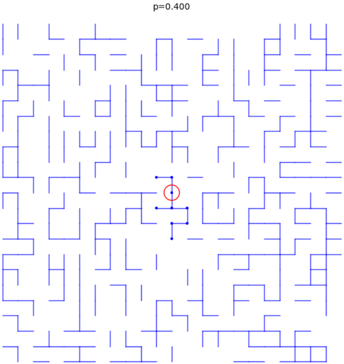
p=0.600

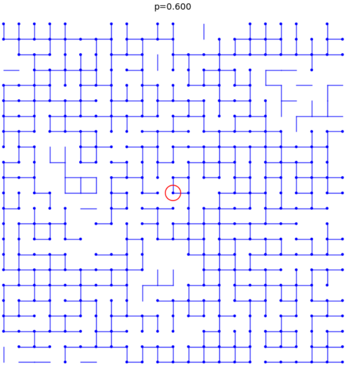


$\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_2}$ $\qquad$ $\mathbb{E}_2 =$ ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^2$

$(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}_2}$ i.i.d. loi Ber(p) $\qquad$ $\omega_e = 1$ si l'arête e est coloriée en bleu

Modèle classique de percolation par arêtes





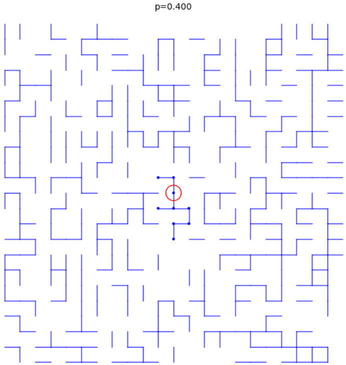
$p<0.5$
Pas de composante connexe infinie

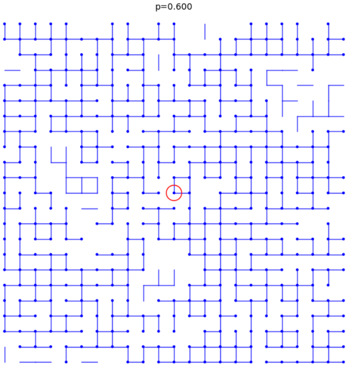
$p > 0.5$
Composante connexe infinie

$\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_2}$
$(\omega_e)_{e\in\mathbb{E}_2}$ i.i.d. loi Ber(p)

$\mathbb{E}_2 =$ ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^2$
$\omega_e = 1$ si l'arête e est coloriée en bleu

Modèle classique de percolation par arêtes





$p \leq 0.5$
Pas de composante connexe infinie

$p > 0.5$
Composante connexe infinie

$\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_2}$
$(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}_2}$ i.i.d. loi Ber(p)

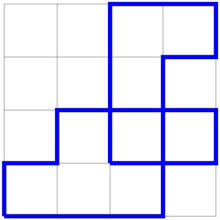
$\mathbb{E}_2$ = ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^2$
$\omega_e = 1$ si l'arête e est coloriée en bleu

Percolation paire

Percolation par arêtes, conditionnée à ce que chaque sommet soit de degré pair.

Percolation paire

Percolation par arêtes, conditionnée à ce que chaque sommet soit de degré pair.

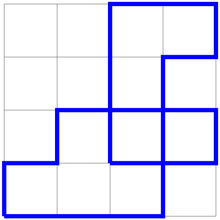


Probabilité $\frac{1}{Z_p}\, p^{N_b}(1-p)^{N_g}$

N_b =nombre d'arêtes bleues
N_g =nombre d'arêtes grises

Percolation paire

Percolation par arêtes, conditionnée à ce que chaque sommet soit de degré pair.



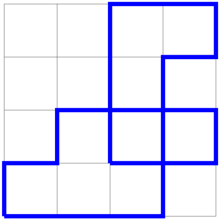
Probabilité $\frac{1}{Z_p}\, p^{N_b}(1-p)^{N_g}$

N_b =nombre d'arêtes bleues
N_g =nombre d'arêtes grises

Comment définir la mesure de percolation paire sur $\mathbb{Z}^2$ tout entier ?

Percolation paire

Percolation par arêtes, conditionnée à ce que chaque sommet soit de degré pair.



Probabilité $\qquad \frac{1}{Z_p}\, p^{N_b}(1-p)^{N_g}$

N_b =nombre d'arêtes bleues
N_g =nombre d'arêtes grises

Comment définir la mesure de percolation paire sur $\mathbb{Z}^2$ tout entier ?
Quelles sont les propriétés de connectivité du sous-graphe aléatoire obtenu ?

Définition de la mesure de percolation paire sur $\mathbb{Z}^2$

Degré du sommet x dans la configuration ω : $d_\omega(x) = \sum_{e \ni x} \omega_e$

On veut conditionner la percolation de Bernoulli à l'événement :

$$\Omega_{PP} = \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_2}; \forall x \in \mathbb{Z}^2, d_\omega(x) \equiv 0[2]\}$$

Définition de la mesure de percolation paire sur $\mathbb{Z}^2$

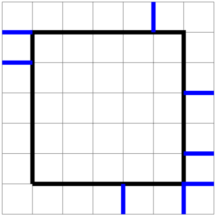
Degré du sommet x dans la configuration ω : $d_\omega(x) = \sum_{e \ni x} \omega_e$

On veut conditionner la percolation de Bernoulli à l'événement :

$$\Omega_{PP} = \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}_2} ; \forall x \in \mathbb{Z}^2, d_\omega(x) \equiv 0[2]\}$$

Formalisme des **mesures de Gibbs** :

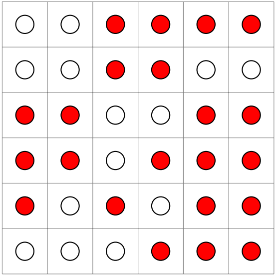
$$\mu^p_{\Lambda,\eta}(\omega) = \frac{1}{Z} \mathbf{1}_{\eta_{\Lambda^c}\omega_\Lambda \in \Omega_{PP}} \, p^{\sum_{e\in\Lambda}\omega_e} \, (1-p)^{\sum_{e\in\Lambda}(1-\omega_e)}$$



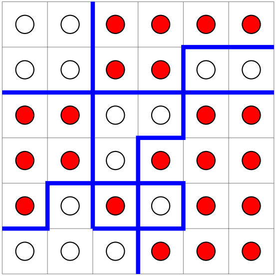
Boîte finie Λ

Configuration $\eta \in \Omega_{PP}$ à l'extérieur de Λ

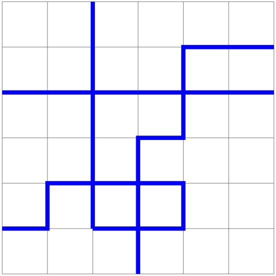
Coloriages et contours



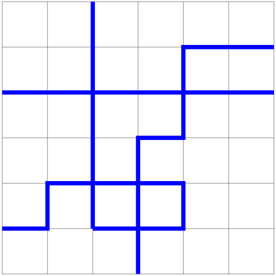
Coloriages et contours

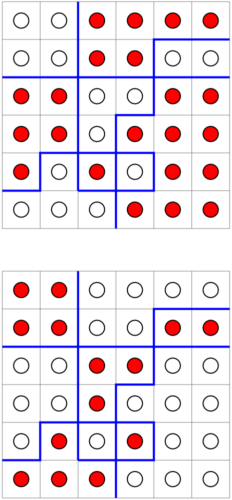


Coloriages et contours

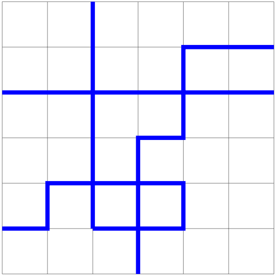


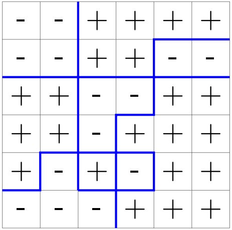
Coloriages et contours

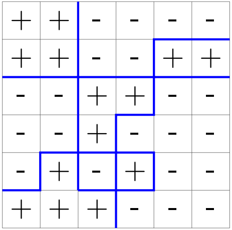




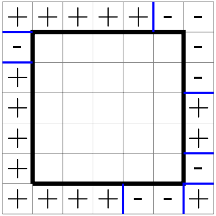
Coloriages et contours





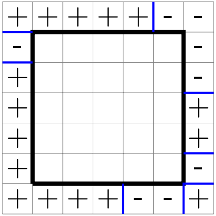


Lien avec le modèle d'Ising



$$\pi^{\beta}_{\Lambda,\eta}(\omega) = \frac{1}{Z} \exp\Big(\beta \sum_{i \sim j,\ i \text{ ou } j \in \Lambda} \omega_i \omega_j\Big)$$

Lien avec le modèle d'Ising

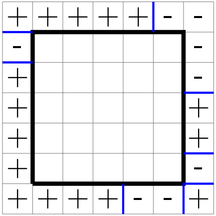


$$\pi^{\beta}_{\Lambda,\eta}(\omega) = \frac{1}{Z}\exp\left(\beta \sum_{i\sim j,\ i \text{ ou } j\in\Lambda} \omega_i\omega_j\right)$$

$\beta \leq \beta_c$: une unique mesure de Gibbs

$\beta > \beta_c$: deux mesures extrêmales π^+_β et π^-_β

Lien avec le modèle d'Ising



$$\pi^{\beta}_{\Lambda,\eta}(\omega) = \frac{1}{Z}\exp\left(\beta \sum_{i\sim j,\ i \text{ ou } j\in\Lambda} \omega_i\omega_j\right)$$

$\beta \leq \beta_c$: une unique mesure de Gibbs

$\beta > \beta_c$: deux mesures extrêmales π^+_β et π^-_β

Proposition

Il existe une unique mesure de percolation paire μ_p sur $\mathbb{Z}^2$: c'est l'image par l'application **contour** de n'importe laquelle des mesures de Gibbs pour le modèle d'Ising de paramètre $\beta(p) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-p}{p}\right)$.

p	0		$\frac{1}{2}$	1
$\beta(p)$	$+\infty$	β_c	0	$-\infty$

Étude des composantes connexes

Proposition

Soit $p \in [0,1]$, et N le nombre de composantes connexes infinies. On a $\mu_p(N=0)=1$ ou $\mu_p(N=1)=1$.

Étude des composantes connexes

Proposition

Soit $p \in [0,1]$, et N le nombre de composantes connexes infinies. On a $\mu_p(N=0)=1$ ou $\mu_p(N=1)=1$.

$$\beta_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}) \;\rightsquigarrow\; p_c = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \;\left(< \frac{1}{2}\right)$$

Étude des composantes connexes

Proposition

Soit $p \in [0,1]$, et N le nombre de composantes connexes infinies. On a $\mu_p(N=0)=1$ ou $\mu_p(N=1)=1$.

$$\beta_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}) \rightsquigarrow p_c = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ \left(< \frac{1}{2} \right)$$

Proposition

Pour la mesure μ_p de percolation paire :

- si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie,
- si $p_c < p < 1/2$ ($0 < \beta < \beta_c$), p.s. une (unique) composante connexe infinie.

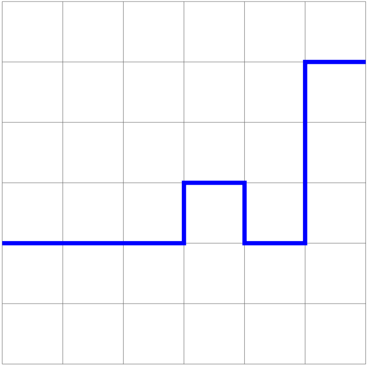
Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.

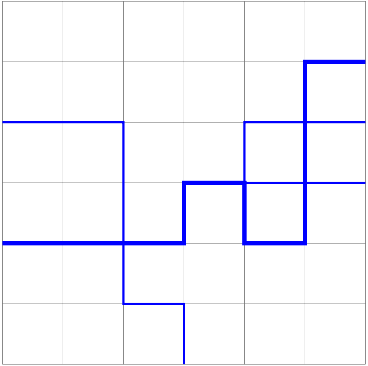
Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.



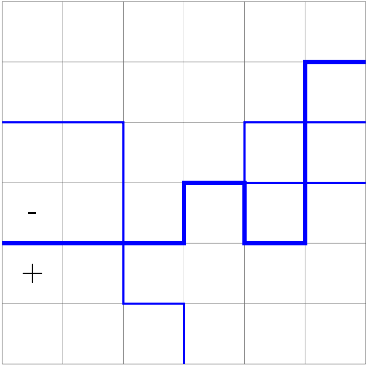
Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.



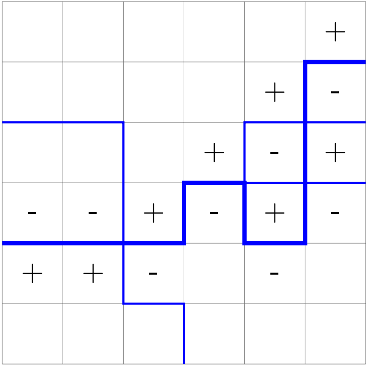
Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.



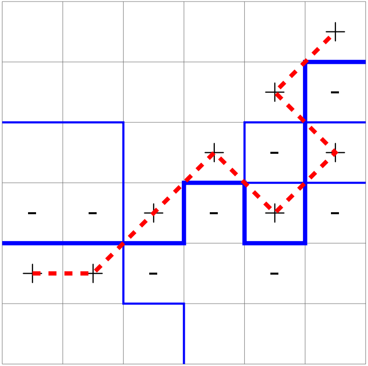
Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.



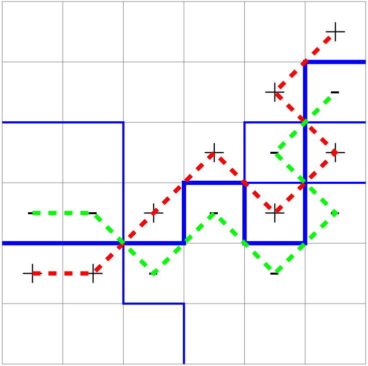
Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.



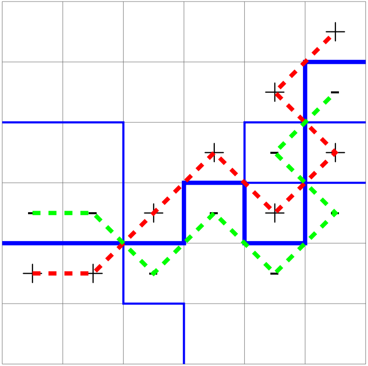
Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.



Si $p < p_c$ ($\beta > \beta_c$), p.s. pas de composante connexe infinie.

Supposons qu'il y a un chemin infini.



Mais on sait que pour $\beta > \beta_c$, sous π_β^+, il ne peut pas y avoir d'$*$-chemin infini de spins $-$, contradiction !

[Russo 1979]

Si $p_c < p < 1/2$ $(0 < \beta < \beta_c)$, p.s. une (unique) composante connexe infinie.

Si $p_c < p < 1/2$ ($0 < \beta < \beta_c$), p.s. une (unique) composante connexe infinie.

Pour $0 < \beta < \beta_c$:

- il y a un $*$-chemin infini de spins $+$,
- toutes les composantes connexes de spins $+$ sont finies.

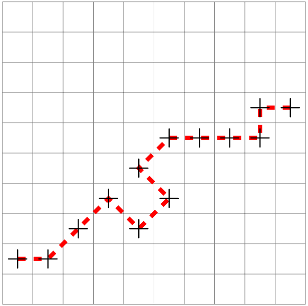
`[Coniglia et al. 1976, Higuchi 1993]`

Si $p_c < p < 1/2$ ($0 < \beta < \beta_c$), p.s. une (unique) composante connexe infinie.

Pour $0 < \beta < \beta_c$:

- il y a un $*$-chemin infini de spins $+$,
- toutes les composantes connexes de spins $+$ sont finies.

[Coniglia et al. 1976, Higuchi 1993]

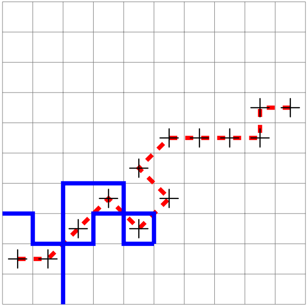


Si $p_c < p < 1/2$ ($0 < \beta < \beta_c$), p.s. une (unique) composante connexe infinie.

Pour $0 < \beta < \beta_c$:

- il y a un $*$-chemin infini de spins $+$,
- toutes les composantes connexes de spins $+$ sont finies.

[Coniglia et al. 1976, Higuchi 1993]

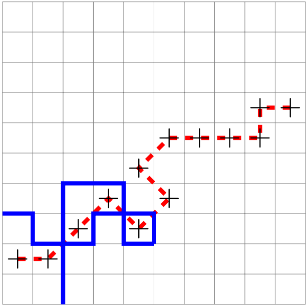


Si $p_c < p < 1/2$ ($0 < \beta < \beta_c$), p.s. une (unique) composante connexe infinie.

Pour $0 < \beta < \beta_c$:

- il y a un $*$-chemin infini de spins $+$,
- toutes les composantes connexes de spins $+$ sont finies.

[Coniglia et al. 1976, Higuchi 1993]



L'union des contours des composantes connexes de spins $+$ forme une composante connexe infinie pour la percolation paire.

Résumé

p	0	p_c	$\frac{1}{2}$	1
$\beta(p)$	$+\infty$	β_c	0	$-\infty$
μ_p	pas perco	perco		

Résumé

p	0		p_c		$\frac{1}{2}$		p_1		p_2		1
$\beta(p)$	$+\infty$		β_c		0						$-\infty$
μ_p		pas perco		perco		perco		?		perco	

Résumé

p	0		p_c		$\frac{1}{2}$		p_1		p_2		1
$\beta(p)$	$+\infty$		β_c		0						$-\infty$
μ_p		pas perco		perco		perco		?		perco	

Contrairement au modèle de percolation de Bernoulli,
la monotonie n'est pas évidente pour la percolation paire !

Résumé

p	0	p_c	$\frac{1}{2}$	p_1	p_2	1
$\beta(p)$	$+\infty$	β_c	0			$-\infty$
μ_p	pas perco	perco	perco	?	perco	

Contrairement au modèle de percolation de Bernoulli,
la monotonie n'est pas évidente pour la percolation paire !

Conjecture : si G est un graphe eulérien fini, la mesure μ_p de percolation paire est stochastiquement croissante en p...

Résumé

p	0		p_c		$\frac{1}{2}$		p_1		p_2		1
$\beta(p)$	$+\infty$		β_c		0						$-\infty$
μ_p		pas perco		perco		perco		?		perco	

Contrairement au modèle de percolation de Bernoulli,
la monotonie n'est pas évidente pour la percolation paire !

Conjecture : si G est un graphe eulérien fini, la mesure μ_p de percolation paire est stochastiquement croissante en p...

Does Eulerian percolation on $\mathbb{Z}^2$ percolate?
O. Garet, R. Marchand, I. Marcovici
arXiv:1607.01974