Grandes déviations des traces de matrices aléatoires

Fanny Augeri

Mardi 30 Août 2016

Journeés MAS, Grenoble

INSTITUT
de MATHEMATIQUES
de TOULOUSE

Traces et nombres de Catalan

,

Traces et nombres de Catalan

On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & \overline{X_{n-1,n}} & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

,

Traces et nombres de Catalan

On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & \overline{X_{n-1,n}} & & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbb{E}X_{i,j} = 0$, $\mathbb{E}|X_{1,2}|^2 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}|X_{i,j}|^k < +\infty$,

Traces et nombres de Catalan

On définit $X \in H_n(\mathbb{C})$, matrice de Wigner,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ \overline{X_{1,2}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_{n-1,n} \\ \overline{X_{n,1}} & \cdots & \overline{X_{n-1,n}} & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbb{E}X_{i,j} = 0$, $\mathbb{E}|X_{1,2}|^2 = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}|X_{i,j}|^k < +\infty$,

$$p.s \quad \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} C_{p/2} & p \text{ pair,} \\ 0 & p \text{ impair,} \end{cases}$$

avec $C_{p/2}$ le $(p/2)^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.

Méthode des moments

Méthode des moments

Loi du semi-cercle

$$\sigma_{sc}(x^{2k}) = C_k, \quad \sigma_{sc}(x^{2k+1}) = 0.$$

Méthode des moments

Loi du semi-cercle

$$\sigma_{sc}(x^{2k}) = C_k, \quad \sigma_{sc}(x^{2k+1}) = 0.$$

Mesure spectrale empirique

$$\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p.$$

Méthode des moments

Loi du semi-cercle

$$\sigma_{sc}(x^{2k}) = C_k, \quad \sigma_{sc}(x^{2k+1}) = 0.$$

Mesure spectrale empirique

$$\mu_{X/\sqrt{n}}(x^p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p.$$

Si $\mathbb{E}|X_{1,2} - \mathbb{E}X_{1,2}|^2 = 1$,

$$p.s \quad \mu_{X/\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\rightsquigarrow} \sigma_{sc}.$$

Grandes déviations du spectre

Grandes déviations du spectre

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in B\right), \quad \sigma_{sc} \notin \overline{B}.$$

Grandes déviations du spectre

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in B\right), \quad \sigma_{sc} \notin \overline{B}.$$

Quelle vitesse ?

Grandes déviations du spectre

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in B\right), \quad \sigma_{sc} \notin \overline{B}.$$

Quelle vitesse ?

- (Guionnet-Zeitouni). $X_{i,j}$ bornées ou satisfaisant LSI

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in B\right) \leq \exp(-cn^2).$$

Grandes déviations du spectre

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in B\right), \quad \sigma_{sc} \notin \overline{B}.$$

Quelle vitesse ?

- (Guionnet-Zeitouni). $X_{i,j}$ bornées ou satisfaisant LSI

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in B\right) \leq \exp(-cn^2).$$

- (Talagrand). $X_{i,j}$ de loi exponentielle

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in B\right) \leq \exp(-cn^{3/2}).$$

Quelle fonction de taux ?

Quelle fonction de taux ?

- (Ben-Arous - Guionnet). X du GUE ($\beta = 2$) ou GOE ($\beta = 1$)

Quelle fonction de taux ?

- (Ben-Arous - Guionnet). X du GUE ($\beta = 2$) ou GOE ($\beta = 1$)

$$v(n) = n^2, \; I_\beta(\mu) = \frac{\beta}{4}\int x^2 \, d\mu + \frac{\beta}{2}\int \log|x-y|^{-1} d\mu(x) d\mu(y) - c_\beta .$$

Quelle fonction de taux ?

- (Ben-Arous - Guionnet). X du GUE ($\beta = 2$) ou GOE ($\beta = 1$)

$$v(n) = n^2, \; I_\beta(\mu) = \frac{\beta}{4}\int x^2 d\mu + \frac{\beta}{2}\int \log|x-y|^{-1} d\mu(x) d\mu(y) - c_\beta.$$

- (Bordenave - Caputo). $X_{i,j}$ "sans queue sous-gaussienne"

$$\mathbb{P}\left(|X_{1,1}| > t\right) \sim e^{-at^\alpha}, \; \mathbb{P}\left(|X_{1,2}| > t\right) \sim e^{-2at^\alpha}, \; 0 < \alpha < 2.$$

Quelle fonction de taux ?

- (Ben-Arous - Guionnet). X du GUE ($\beta = 2$) ou GOE ($\beta = 1$)

$$v(n) = n^2,\ I_\beta(\mu) = \frac{\beta}{4}\int x^2 d\mu + \frac{\beta}{2}\int \log|x-y|^{-1} d\mu(x)d\mu(y) - c_\beta.$$

- (Bordenave - Caputo). $X_{i,j}$ "sans queue sous-gaussienne"

$$\mathbb{P}\left(|X_{1,1}| > t\right) \sim e^{-at^\alpha},\ \mathbb{P}\left(|X_{1,2}| > t\right) \sim e^{-2at^\alpha},\ 0 < \alpha < 2.$$

$$v(n) = n^{1+\alpha/2},\ I_\alpha(\mu) = \begin{cases} a\int |x|^\alpha d\nu & \text{si } \mu = \sigma_{sc} \boxplus \nu, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right)$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

$$\gtrsim (e^{-\lambda^2 n/4})^n$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

$$\gtrsim e^{-\lambda^2 n^2/4}$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

$$\gtrsim e^{-\lambda^2 n^2/4}$$

- Modification de la variance

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

$$\gtrsim e^{-\lambda^2 n^2/4}$$

- Modification de la variance

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc,\lambda}\right)$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

$$\gtrsim e^{-\lambda^2 n^2/4}$$

- Modification de la variance

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc,\lambda}\right) \underset{Y=\frac{1}{\lambda}X}{=}$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

$$\gtrsim e^{-\lambda^2 n^2/4}$$

- Modification de la variance

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc,\lambda}\right) \underset{Y=\frac{1}{\lambda}X}{=} \lambda^{n^2} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc}\}} e^{(1-\lambda^2)\mathrm{tr} X^2/4}\right)$$

Nature des déviations : cas du GOE?

$$X \propto e^{-\mathrm{tr} H^2/4} dH.$$

- Perturbation diagonale

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc} * \delta_\lambda\right) \gtrsim \mathbb{P}\left\{\frac{X}{\sqrt{n}} \simeq \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mu_{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}} \simeq \sigma_{sc}\right\}$$

$$\gtrsim e^{-\lambda^2 n^2/4}$$

- Modification de la variance

$$\mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc,\lambda}\right) \underset{Y=\frac{1}{\lambda}X}{=} \lambda^{n^2} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \sigma_{sc}\}} e^{(1-\lambda^2)\mathrm{tr} X^2/4}\right)$$

$$\gtrsim e^{-n^2(\lambda^2/4 - \log\lambda - 1)}$$

Nature des déviations : entrées "sans queues gaussiennes"?

Nature des déviations : entrées "sans queues gaussiennes"?

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq$$

Nature des déviations : entrées "sans queues gaussiennes"?

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \mu_{A+C}$$

Nature des déviations : entrées "sans queues gaussiennes"?

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \mu_{A+C}$$

- A et C asymptotiquement indépendantes
- $\mathbb{E}\mu_A \simeq \mu_A$
- C matrice d'adjacence d'un réseau sparse.

Nature des déviations : entrées "sans queues gaussiennes"?

$$\mu_{X/\sqrt{n}} \simeq \mu_{A+C} \simeq \sigma_{sc} \boxplus \mu_C$$

- A et C asymptotiquement indépendantes
- $\mathbb{E}\mu_A \simeq \mu_A$
- C matrice d'adjacence d'un réseau sparse.

Grandes déviations des traces?

Grandes déviations des traces?

Problèmes :

- $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
- Pas de moments exponentiels.

Grandes déviations des traces?

Problèmes :

- $\mu \longmapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
- Pas de moments exponentiels.

Quelle vitesse?

Grandes déviations des traces?

Problèmes :

- $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
- Pas de moments exponentiels.

Quelle vitesse?

- (Meckes - Szarek). $X_{i,j}$ bornées ou satisfaisant LSI

$$\mathbb{P}\left(|\frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p - \sigma_{sc}(x^p)| > t \right) \lesssim \exp(-cn^{1+2/p}t^{2/p}).$$

Grandes déviations des traces?

Problèmes :

- $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
- Pas de moments exponentiels.

Quelle vitesse?

- (Meckes - Szarek). $X_{i,j}$ bornées ou satisfaisant LSI

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \operatorname{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \right)^p - \sigma_{sc}(x^p) \right| > t \right) \lesssim \exp(-cn^{1+2/p} t^{2/p}).$$

$p = 2$: moyenne empirique de v.a i.i.d.

Grandes déviations des traces?

Problèmes :

- $\mu \mapsto \mu(x^p)$ n'est pas continue pour la topologie faible.
- Pas de moments exponentiels.

Quelle vitesse?

- (Meckes - Szarek). $X_{i,j}$ bornées ou satisfaisant LSI

$$\mathbb{P}\left(|\frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p - \sigma_{sc}(x^p)| > t \right) \lesssim \exp(-cn^{1+2/p}t^{2/p}).$$

$p = 2$: moyenne empirique de v.a i.i.d.

$p = +\infty$: $\mathrm{tr}(X/\sqrt{n})^p \simeq n{\lambda_{\max}}^p$.

Cas Gaussien

Cas Gaussien

Hypothèses $X_{i,i} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $X_{i,j} \sim \mathcal{N}_\beta(0,1)$, $(\beta = 1,2)$.

Cas Gaussien

Hypothèses $X_{i,i} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $X_{i,j} \sim \mathcal{N}_\beta(0,1)$, $(\beta = 1,2)$.

Théorème : $\frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p$ satisfait un PGD à vitesse $n^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p.

Cas Gaussien

Hypothèses $X_{i,i} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $X_{i,j} \sim \mathcal{N}_\beta(0,1)$, $(\beta = 1,2)$.

Théorème : $\frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p$ satisfait un PGD à vitesse $n^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p.

$$J_{2k}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2},\beta\right)(s-C_k)^{\frac{1}{k}} & \text{si } s \geq C_k, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

Cas Gaussien

Hypothèses $X_{i,i} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $X_{i,j} \sim \mathcal{N}_\beta(0,1)$, $(\beta = 1,2)$.

Théorème : $\frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right)^p$ satisfait un PGD à vitesse $n^{1+\frac{2}{p}}$, de fonction de taux J_p.

$$J_{2k}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2},\beta\right)(s-C_k)^{\frac{1}{k}} & \text{si } s \geq C_k, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$J_{2k+1}(s) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{\sigma^2},\beta\right)|s|^{\frac{2}{2k+1}}.$$

Remarque sur la fonction de taux

Remarque sur la fonction de taux

- $J_{2k}(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_k)$.

Remarque sur la fonction de taux

- $J_{2k}(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_k)$. Si $t < C_k$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}(X/\sqrt{n})^{2k} \leq t\right)$$

Remarque sur la fonction de taux

- $J_{2k}(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_k)$. Si $t < C_k$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}(X/\sqrt{n})^{2k} \le t\right) = \mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in F\right), \ \sigma_{sc} \notin F$$

Remarque sur la fonction de taux

- $J_{2k}(s) = +\infty$ sur $(-\infty, C_k)$. Si $t < C_k$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}(X/\sqrt{n})^{2k} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\mu_{X/\sqrt{n}} \in F\right),\ \sigma_{sc} \notin F$$
$$\leq \exp(-cn^2) \quad \text{(Guionnet - Zeitouni)}$$

Formule variationnelle pour J_p,

$$J_p(s) = \inf\{\underbrace{q(H)}_{\text{coût}} : s = \underbrace{\sigma_{sc}(x^p) + \mathrm{tr} H^p}_{\text{dévation possible}}, H \in \cup_{n\geq 1}\mathcal{H}_n^{(\beta)}\},$$

$X \sim e^{-q(H)} dH.$

Formule variationnelle pour J_p,

$$J_p(s) = \inf\{\underbrace{q(H)}_{\text{coût}} : s = \underbrace{\sigma_{sc}(x^p) + \mathrm{tr} H^p}_{\text{dévation possible}}, H \in \cup_{n\geq 1} \mathcal{H}_n^{(\beta)}\},$$

$X \sim e^{-q(H)} dH.$

- Déviations dues à des translations par $n^{1/2+1/p} H$ où $||H||_{HS} < +\infty$.

Formule variationnelle pour J_p,

$$J_p(s) = \inf\{\underbrace{q(H)}_{\text{coût}} : s = \underbrace{\sigma_{sc}(x^p) + \mathrm{tr} H^p}_{\text{dévation possible}}, H \in \cup_{n\geq 1} \mathcal{H}_n^{(\beta)}\},$$

$X \sim e^{-q(H)} dH.$

- Déviations dues à des translations par $n^{1/2+1/p} H$ où $||H||_{HS} < +\infty$.
- (Borell). Grandes déviations des chaos de Weiner.

- Pour X une matrice du GOE, la loi jointe des valeurs propres est

$$\mathrm{d}\mathbb{P}_n = \frac{1}{Z_n} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| e^{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \prod_{i=1}^n d\lambda_i.$$

- Pour X une matrice du GOE, la loi jointe des valeurs propres est

$$d\mathbb{P}_n = \frac{1}{Z_n} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| e^{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \prod_{i=1}^{n} d\lambda_i.$$

- Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \sim \mathcal{N}(0, 2I_n)$,

- Pour X une matrice du GOE, la loi jointe des valeurs propres est

$$\mathrm{d}\mathbb{P}_n = \frac{1}{Z_n} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| e^{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \prod_{i=1}^n d\lambda_i.$$

- Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \sim \mathcal{N}(0, 2I_n)$,

$$\frac{1}{n^{1+p/2}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^p,$$

- Pour X une matrice du GOE, la loi jointe des valeurs propres est

$$\mathrm{d}\mathbb{P}_n = \frac{1}{Z_n} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| e^{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \prod_{i=1}^n d\lambda_i.$$

- Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \sim \mathcal{N}(0, 2I_n)$,

$$\frac{1}{n^{1+p/2}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^p,$$

satisfait un PGD à vitesse $n^{1+2/p}$ et fonction de taux,

$$J_p(s) = \frac{1}{4}|s|^{2/p}.$$

Merci de votre attention !