

MARCHE ALÉATOIRE SUR UN DIGRAPHE  
ALÉATOIRE

Charles Bordenave

CNRS & Université Paul Sabatier

*En collaboration avec*

*Pietro Caputo (Roma 3) & Justin Salez (Paris 7)*

# CHAÎNES DE MARKOV À ESPACE D'ÉTATS FINI

## CHAÎNE DE MARKOV MÉLANGEANTE

On considère une chaîne de Markov sur un espace d'états fini  $X$  et de matrice de transition  $P$  irréductible et apériodique.

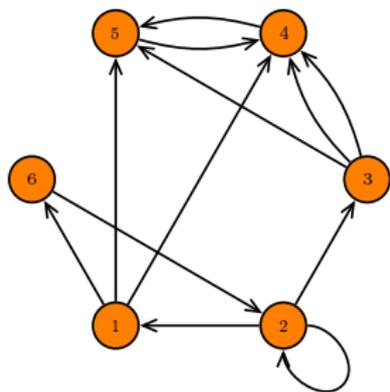
Il existe une unique mesure de probabilité telle que

$$\pi = \pi P.$$

Pour tous  $x, y \in X$ ,

$$P^t(x, y) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi(y).$$

## MARCHE ALÉATOIRE SUR UN DIGRAPHE



$$\deg^-(3) = 1, \quad \deg^+(3) = 3$$

$$P(x, y) = \frac{\text{nb d'arêtes } (x, y)}{\deg^+(x)}.$$

La mesure invariante  $\pi$  de  $P$  est utilisée dans des algorithmes de classement : *mesure d'importance d'un sommet dans le graphe.*

Si le graphe est non-dirigé (arêtes symétriques) alors la chaîne de Markov est **réversible** et  $\pi(x) \propto \deg(x)$ .

## VITESSE DE CONVERGENCE

Pour tous  $x, y \in X$ ,

$$P^t(x, y) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi(y).$$

Distance à l'équilibre

$$d_x(t) = \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{y \in X} |P^t(x, y) - \pi(y)|.$$

$$d(t) = \max_{x \in X} d_x(t).$$

Temps de mélange pour  $0 < \varepsilon < 1$ ,

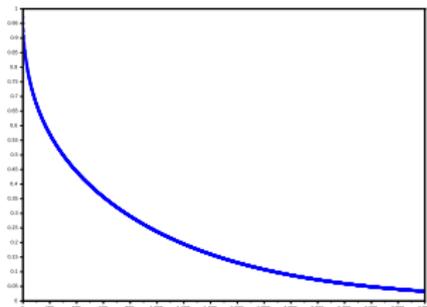
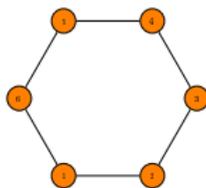
$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) = \inf\{t : d(t) \leq \varepsilon\}.$$

## MARCHE ALÉATOIRE SUR LE CERCLE

$$X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$P$  = marche aléatoire ralentie (proba  $1/2$  de rester sur place).

$\pi$  = mesure uniforme.



$$\sup_t \left| d(t) - d^* \left( \frac{t}{n^2} \right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad t_{\text{mix}}(\varepsilon) \asymp n^2 \log \left( \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

## TROU SPECTRAL

$$\lambda_\star = \max \{ |\lambda| : \lambda \neq 1, \text{ valeur propre de } P \}.$$

Pour une chaîne de Markov irréductible apériodique,

$$\frac{\lambda_\star^t}{2} \leq d(t) \leq \frac{\lambda_\star^t}{\pi_{\min}}.$$

$$d(t)^{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda_\star.$$

On trouve

$$\frac{\lambda_\star}{1 - \lambda_\star} \log \left( \frac{1}{2\varepsilon} \right) \leq t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\pi_{\min} \varepsilon} \log \left( \frac{1}{\pi_{\min} \varepsilon} \right).$$

## GRAPHE EXPANSEUR

Une suite de graphes (non-dirigés) tels que  $1 - \lambda_\star > \varepsilon$  pour un certain  $\varepsilon > 0$  s'appelle une famille d'expandeurs.

L'inégalité de Cheeger relie l'isopérimétrie du graphe avec le trou spectral  $1 - \lambda_\star$ .

Si  $\text{diam}$  est le diamètre du graphe et  $0 < \varepsilon < 1/2$ ,

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq \frac{\text{diam}}{2}.$$

Pour un expandeur avec degré max  $\Delta = O(1)$ ,  
 $\text{diam} \geq \log |X| / \log \Delta$  et

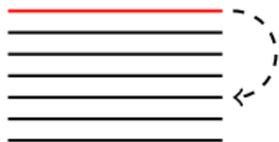
$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \asymp \log |X|.$$

## MÉLANGE D'UN JEU DE CARTES

$X = S_n$ .

$P$  = la carte du dessus est placée en position uniforme.

$\pi$  = mesure uniforme.



*Theorem (Aldous-Diaconis (1986))*

Pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$t_{\text{mix}}^{(n)}(\varepsilon) = (1 + o(1))n \log n.$$

C'est-à-dire : pour tout  $\lambda \geq 0$  fixé,

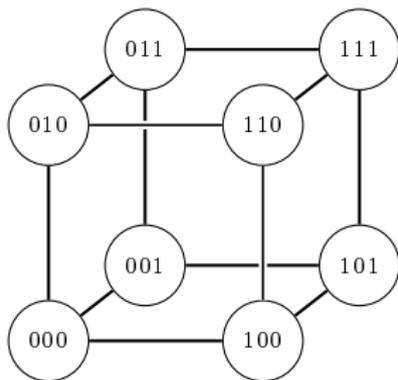
$$d(\lambda n \log n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda < 1 \\ 0 & \text{si } \lambda > 1. \end{cases}$$

## MARCHE ALÉATOIRE SUR L'HYPERCUBE

$$X = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n.$$

$P$  = marche aléatoire ralentie (proba  $1/2$  de rester sur place).

$\pi$  = mesure uniforme.

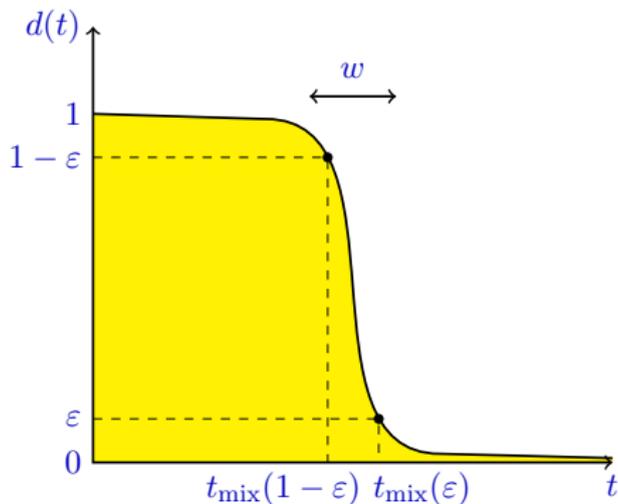


*Theorem (Aldous (1983))*

Pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$t_{\text{mix}}^{(n)}(\varepsilon) = (1 + o(1)) \frac{n \log n}{2}.$$

## LE PHÉNOMÈNE DE COUPURE



Une suite de chaînes de Markov  $P^{(n)}$  sur  $X^{(n)}$  a une **coupure** si pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$\frac{t_{\text{mix}}^{(n)}(\varepsilon)}{t_{\text{mix}}^{(n)}(1 - \varepsilon)} \rightarrow 1.$$

(Aldous-Diaconis 1986)

## CRITÈRE DE PERES

$$\frac{\lambda_\star}{1 - \lambda_\star} \log \left( \frac{1}{2\varepsilon} \right) \leq t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq_{\text{rev}} \frac{1}{1 - \lambda_\star} \log \left( \frac{1}{\pi_{\min} \varepsilon} \right).$$

Une **condition nécessaire** pour la coupure (si  $t_{\text{mix}}^{(n)}(\varepsilon_0) \rightarrow \infty$ ) :

$$(1 - \lambda_\star^{(n)}) t_{\text{mix}}^{(n)}(\varepsilon_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Cette condition n'est pas suffisante pour  $\|\cdot\|_{\text{TV}}$  (elle l'est pour d'autres distances, *Chen - Saloff Coste (2008)*).

*Les graphes expandeurs sont de bon candidats pour vérifier des phénomènes de coupure.*

## EXEMPLES DE COUPURE

- ★ Marches aléatoires sur  $S_n$ , *Diaconis-Shahshahani (1981), Aldous (1983), Aldous-Diaconis (1986)*.
- ★ Marche aléatoire sur des groupes finis, *Saloff Coste (2004)*.
- ★ Processus de naissance et de mort, *Diaconis-Saloff Coste (2006)*.
- ★ Marche aléatoire sur graphe aléatoire, *Lubetzky-Sly (2010), Berestycki-Lubetzky-Peres-Sly (2015), Ben Hamou-Salez (2015)*.
- ★ Marche aléatoire sur graphe de Ramanujan, *Lubetzky-Peres (2015)*.
- ★ Particules en interaction, *Lubetzky-Sly (2013-2015), Lacoïn (2014-2015)*.
- ★ ...

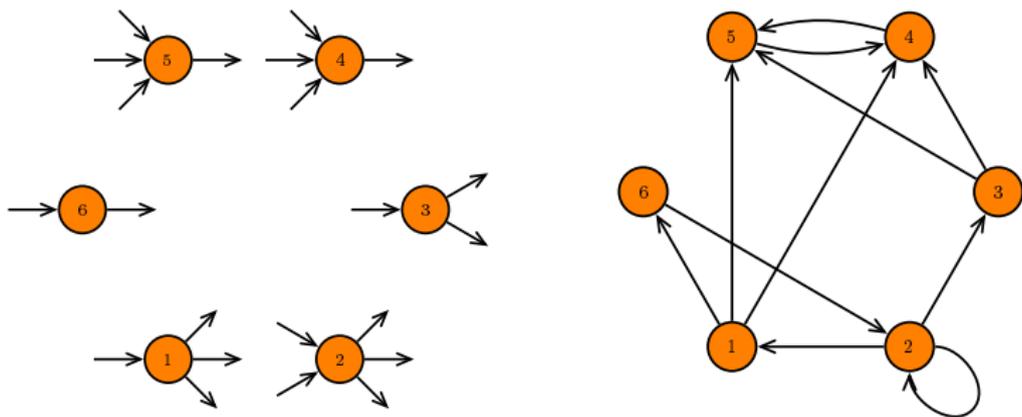
MARCHE ALÉATOIRE SUR  
UN DIGRAPHE ALÉATOIRE

## DIGRAPHE ALÉATOIRE AVEC DEGRÉS DONNÉS

On pose  $X = \{1, \dots, n\}$ .

On se donne une suite de degrés  $(d_x^+, d_x^-), x \in X$ , telle que

$$m = \sum_x d_x^+ = \sum_x d_x^-.$$



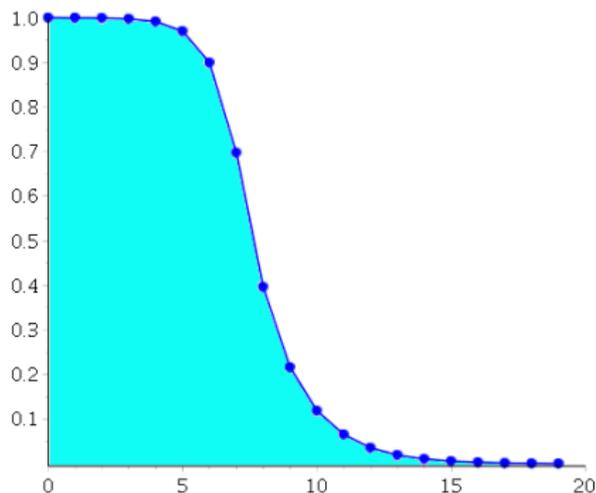
On assemble les flèches ‘départ’ et ‘arrivée’ uniformément au hasard (c.-à-d. par une bijection uniforme de l’espace des flèches ‘départ’ vers l’espace des flèches ‘arrivée’).

## DISTANCE À L'ÉQUILIBRE

$n = 15000 = 3 \times 5000$  sommets avec degrés

$$(d^+, d^-) = (3, 2), (3, 4) \text{ et } (4, 4).$$

$P =$  marche aléatoire,  $d(t) = \max_x \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV}$ .



## CONVERGENCE À L'ÉQUILIBRE

Pour un certain  $\Delta$  fixé, on suppose

$$2 \leq d_x^\pm \leq \Delta.$$

*Théorème*

On pose  $\pi^-(x) = d_x^-/m$ ,

$$\mu = \sum_x \pi^-(x) \log d_x^+ \quad \text{et} \quad t_n = \frac{\log n}{\mu}.$$

Pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ , en probabilité,

$$\frac{t_{\text{mix}}(\varepsilon)}{t_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

## CONVERGENCE À L'ÉQUILIBRE

$$\mu = \sum_x \pi^-(x) \log d_x^+ \quad \text{et} \quad t_n = \frac{\log n}{\mu}.$$

*Théorème*

On pose  $\pi^-(x) = d_x^-/m$  et

$$w_n = \frac{\sigma}{\mu} \sqrt{t_n} \quad \text{où} \quad \sigma^2 = \sum_x \pi^-(x) (\log d_x^+ - \mu)^2.$$

Si  $\sigma^2 \gg (\log \log n)^2 / \log n$ , pour tout réel  $\lambda$  fixé, en probabilité,

$$d(t_n + \lambda w_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

## CONVERGENCE EXPONENTIELLE À L'ÉQUILIBRE

$$d(t) = \max_x \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} = \max_{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \|\nu P^t - \pi\|_{\text{TV}}.$$

*Théorème*

On pose  $\pi^-(x) = d_x^-/m$ ,

$$\rho^2 = \sum_x \pi^-(x) \frac{1}{d_x^+} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma^2 = \sum_x \pi^-(x) \frac{d_x^-}{d_x^+} \leq \frac{\Delta}{2}.$$

Pour tout  $t$  fixé, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , en probabilité,

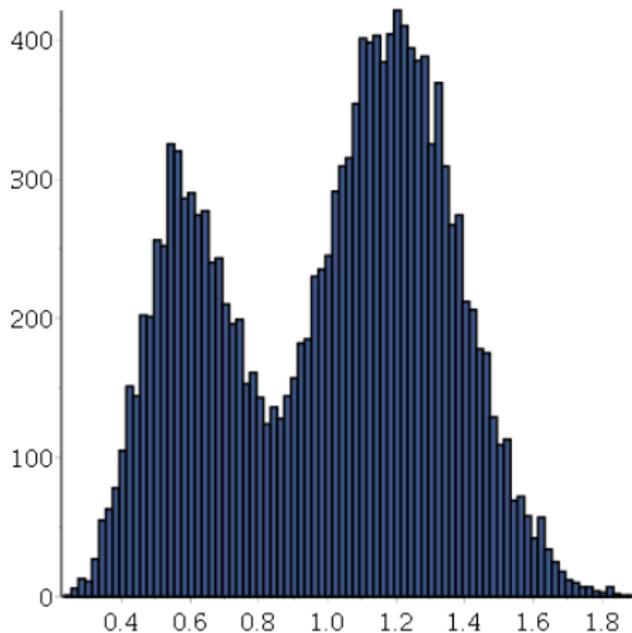
$$\|\pi^- P^t - \pi\|_{\text{TV}} \leq \left(\frac{\gamma}{2}\right) \rho^t + o_{\mathbb{P}}(1).$$

La mesure invariante  $\pi(x)$  est déterminée par la **géométrie locale** du graphe entrant en  $x$ .

MESURE INVARIANTE :  $n\pi(\cdot)$

$n = 15000 = 3 \times 5000$  sommets avec degrés

$(d^+, d^-) = (3, 2), (3, 4)$  et  $(4, 4)$ .



## MESURE INVARIANTE : $n\pi(\cdot)$

Soit  $Z \geq 0$ ,  $\mathbb{E}Z = 1$  v.a. caractérisée par l'équation récursive en distribution

$$Z \stackrel{d}{=} \frac{1}{d_V^+} \sum_{k=1}^{d_V^-} Z_k.$$

où  $\mathbb{P}(V = x) = d_x^+ / m$ , indépendant de  $(Z_k)$  iid copies iid de  $Z$ .  
*Rösler (1992), Liu (1996-2001), Barral (1999- 2014).*

### Théorème

Si  $U$  est uniforme sur  $X = \{1, \dots, n\}$  indépendant de  $(Z_k)$ .

$$W_1 \left( \frac{1}{n} \sum_x \delta_{n\pi(x)}, \mathcal{L} \left( \frac{n}{m} \sum_{k=1}^{d_U^-} Z_k \right) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

$$\text{dist}_{\text{Lévy}} \left( \mathcal{L}(n\pi(x)), \mathcal{L} \left( \frac{n}{m} \sum_{k=1}^{d_x^-} Z_k \right) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

## TROU SPECTRAL

Rappel

$$\rho = \sqrt{\sum_x \pi^-(x) \frac{1}{d_x^+}} \quad \text{où} \quad \pi^-(x) = \frac{d_x^-}{m}.$$

Pour tout  $t$  fixé, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , en probabilité,

$$\|\pi^- P^t - \pi\|_{\text{TV}} \leq \left(\frac{\gamma}{2}\right) \rho^t + o_{\mathbb{P}}(1).$$

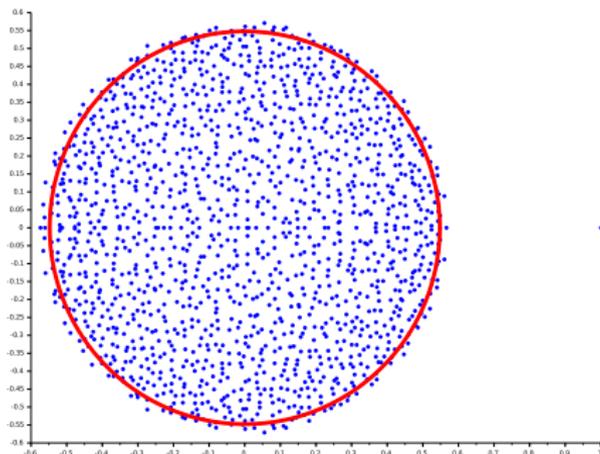
Cela suggère que

$$\lambda_{\star} = \rho + o_{\mathbb{P}}(1).$$

# TROU SPECTRAL

$n = 1500 = 3 \times 500$  sommets avec degrés

$$(d^+, d^-) = (3, 2), (3, 4) \text{ et } (4, 4).$$



## IDÉES DE PREUVE

## LA CHAÎNE VUE PAR LE MARCHEUR

Soit  $X_t$  la position du marcheur au temps  $t$ ,  $X_0 = x$ .

Le poids de la marche vue par le marcheur est

$$W_t = \prod_{s=0}^{t-1} \frac{1}{d_{X_s}^+}.$$

Si

$$W_t \gg \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \pi(\cdot) \asymp \frac{1}{n}$$

alors on est loin de l'équilibre au temps  $t$ .

*Cette borne va être atteinte dans notre cas !*

## BORNE INFÉRIEURE SUR LE TEMPS DE MÉLANGE

Pour n'importe quelle mesure  $\pi$  et pour tout  $\theta > 0$ ,

$$\mathbf{P}_x(W_t > \theta) \leq \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} + \sqrt{\frac{1}{\theta} \sum_x \pi(x)^2}.$$

Si

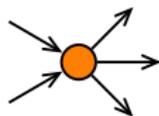
$$\pi(\cdot) \asymp \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{L}{n},$$

on trouve

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \geq \mathbf{P}_x\left(W_t > \frac{L}{n}\right) - O\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right).$$

## LA CHAÎNE VUE PAR LE MARCHEUR

Le marcheur revient rarement sur ses pas en temps  $O(\log n)$ .



Approx. un sommet nouvellement visité est  $x$  avec probabilité

$$\pi^-(x) = \frac{d_x^-}{m}.$$

Si  $(D_s^+)$  iid de loi :

$$\mathbf{P}(D_1^+ = k) = \sum_x \pi^-(x) \mathbf{1}(d_x^+ = k),$$

on trouve

$$\log W_t = - \sum_{s=0}^{t-1} \log(d_{X_s}^+) \approx - \sum_{s=0}^{t-1} \log(D_s^+).$$

## LA CHAÎNE VUE PAR LE MARCHEUR

Vu que

$$\mathbf{E} \log (D_1^+) = \mu \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \mathbf{Var}(\log (D_1^+)),$$

$$W_t \approx e^{-\mu t + \sigma \sqrt{t} G}.$$

Les conditions

$$t \ll t_n = \frac{\log n}{\mu} \quad \text{et} \quad t \gg t_n$$

donnent respectivement

$$W_t \gg \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad W_t \ll \frac{1}{n}.$$

## BORNE SUPÉRIEURE SUR LE TEMPS DE MÉLANGE

On cherche une mesure de probabilité  $\hat{\pi}$  telle que pour tous  $x, y \in X$  et  $t \gg t_n$ ,

$$P^t(x, y) \leq \hat{\pi}(y) + \delta(y),$$

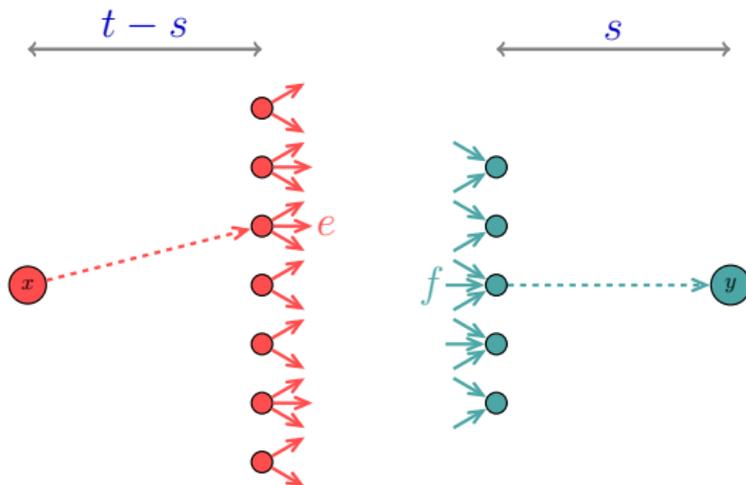
avec

$$\varepsilon = \sum_y (\delta(y))_+ \ll 1.$$

Alors

$$\|P^t(x, \cdot) - \hat{\pi}\|_{\text{TV}} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\pi - \hat{\pi}\|_{\text{TV}} \leq \varepsilon.$$

# BORNE SUPÉRIEURE SUR LE TEMPS DE MÉLANGE



$$P^t(x, y) = \sum_{e \in E^+} P^{t-s}(x, e) \sum_{f \in E^-} P^s(f, y) \times \mathbf{1}(\sigma(e) = f).$$

## BORNE SUPÉRIEURE SUR LE TEMPS DE MÉLANGE

$$\begin{aligned}
 P^t(x, y) &= \sum_{e \in E^+} P^{t-s}(x, e) \sum_{f \in E^-} P^s(f, y) \times \mathbf{1}(\sigma(e) = f) \\
 \hat{\pi}(y) &= \underbrace{\sum_{e \in E^+} P^{t-s}(x, e)}_{=1} \sum_{f \in E^-} P^s(f, y) \times \frac{1}{m}.
 \end{aligned}$$

On a

$$\mathbb{P}(\sigma(e) = f) = \frac{1}{m}.$$

Pour  $t \gg t_n$  et  $s \gg 1$ ,

$$P^t(x, y) = \hat{\pi}(y) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

cette concentration vient essentiellement de

$$P^{t-s}(x, e)P^s(f, y) \ll \frac{1}{n}.$$

## PERSPECTIVES

- ★ Calcul du trou spectral.
- ★ Modèles plus réalistes.
- ★ Généralisation à d'autres chaînes de Markov aléatoires

$$P = Q \times S$$

$Q$  = Markov 'creuse',  $S$  = matrice de permutation aléatoire.

- ★ Condition suffisante pour le phénomène de coupure.

MERCI DE VOTRE ATTENTION !