

Polytopes aléatoires : étude asymptotique

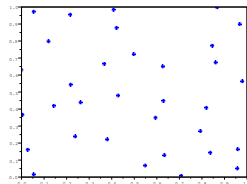
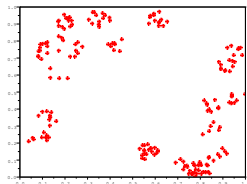
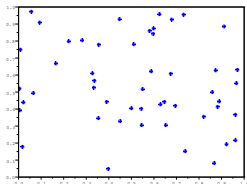
Pierre Calka

29 août 2016, Grenoble

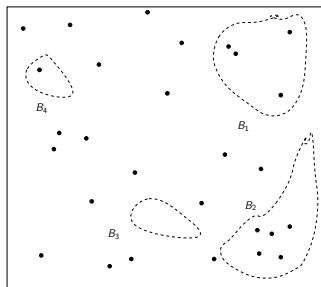
Journées 

Processus ponctuel

Processus ponctuel : ensemble localement fini de points



Processus ponctuel sans interaction



Processus ponctuel binomial

μ mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d

X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi μ

$\mathcal{E} := \{X_1, \dots, X_n\}$

- ▶ $\#(\mathcal{E} \cap B_1)$ v.a. binomiale $(n, \mu(B_1))$
- ▶ $\#(\mathcal{E} \cap B_1), \dots, \#(\mathcal{E} \cap B_\ell)$ non indépendantes

Processus ponctuel de Poisson

μ mesure σ -finie sur \mathbb{R}^d

μ dite **intensité** du processus

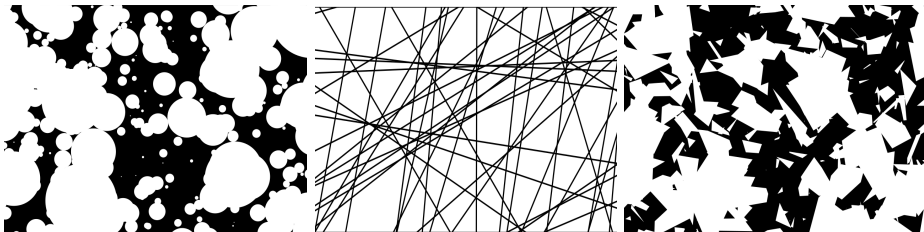
\mathcal{P} ensemble localement fini tel que

- ▶ $\#(\mathcal{P} \cap B_1)$ v.a. de Poisson $(\mu(B_1))$
- ▶ $\#(\mathcal{P} \cap B_1), \dots, \#(\mathcal{P} \cap B_\ell)$ indépendantes

Modèle booléen

Modèle Booléen :

des objet indépendants (boule, droite, polygone...) attachés aux points

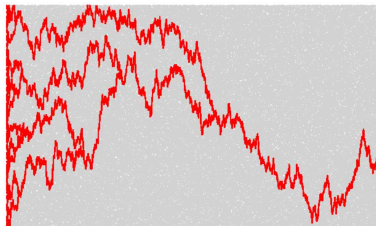
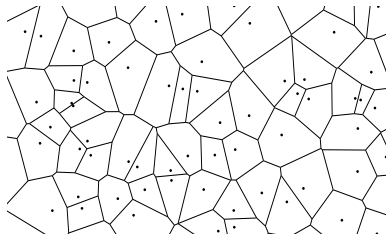


C. Lantuéjoul, *Exact simulation of a Boolean model* (2013)

Graphe géométrique aléatoire

Graphe géométrique aléatoire :

graphe construit à partir des points avec des règles géométriques déterministes en général



D. Coupier & V. C. Tran

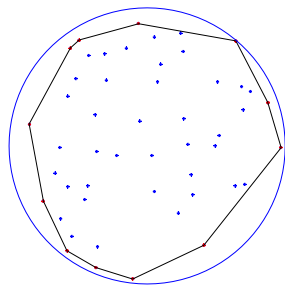
The 2d-Directed Spanning Forest is almost surely a tree (2013)

Polytope aléatoire : modèle binomial uniforme

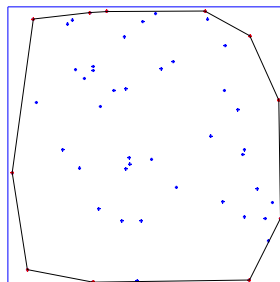
K corps convexe de \mathbb{R}^d

$(X_k, k \in \mathbb{N}^*) :=$ indépendantes et de loi uniforme dans K

$\bar{K}_n := \text{Conv}(X_1, \dots, X_n)$



K_{50} , K disque



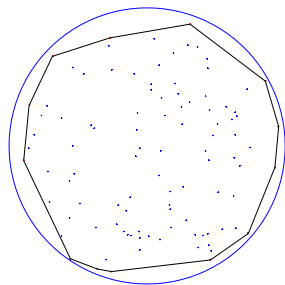
K_{50} , K carré

Polytope aléatoire : modèle binomial uniforme

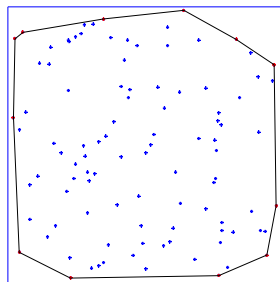
K corps convexe de \mathbb{R}^d

$(X_k, k \in \mathbb{N}^*) :=$ indépendantes et de loi uniforme dans K

$\bar{K}_n := \text{Conv}(X_1, \dots, X_n)$



K_{100} , K disque



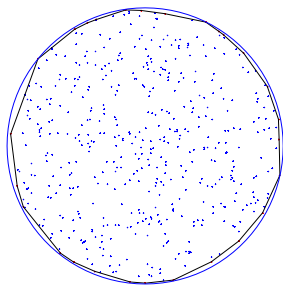
K_{100} , K carré

Polytope aléatoire : modèle binomial uniforme

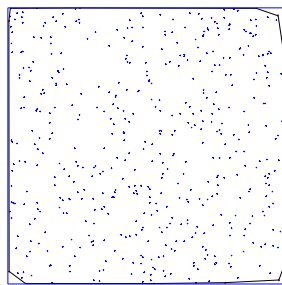
K corps convexe de \mathbb{R}^d

$(X_k, k \in \mathbb{N}^*) :=$ indépendantes et de loi uniforme dans K

$\bar{K}_n := \text{Conv}(X_1, \dots, X_n)$



K_{500} , K disque



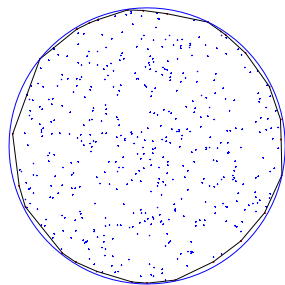
K_{500} , K carré

Polytope aléatoire : modèle poissonnien uniforme

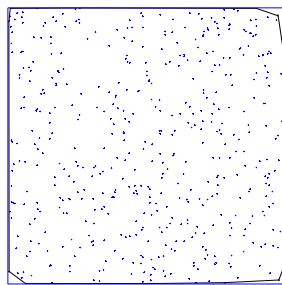
K corps convexe de \mathbb{R}^d

\mathcal{P}_λ , $\lambda > 0$:= processus ponctuel de Poisson d'intensité λdx

$K_\lambda := \text{Conv}(\mathcal{P}_\lambda \cap K)$



K_{500} , K disque



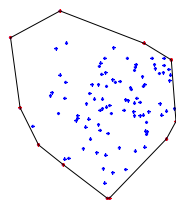
K_{500} , K carré

Polytope aléatoire : modèle poissonnien gaussien

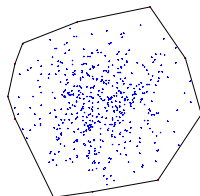
$$\varphi_d(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\|x\|^2/2}, x \in \mathbb{R}^d, d \geq 2$$

$\mathcal{P}_\lambda, \lambda > 0 :=$ processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda\varphi_d(x)dx$

$$K_\lambda := \text{Conv}(\mathcal{P}_\lambda)$$



K_{100}



K_{500}

Plan

Polytopes aléatoires : état de l'art et nouveaux calculs de variance

Cas du disque \mathbb{D} : idée de preuve par limite d'échelle

Cas du carré : idée de preuve par limite d'échelle

Collaborations avec **Joseph Yukich** (Lehigh University, États-Unis) & **Tomasz Schreiber** (Toruń University, Pologne)

Polytopes aléatoires : état de l'art et nouveaux calculs de variance

Grandeurs considérées

Résultats asymptotiques connus en espérance

Résultats asymptotiques connus du second ordre

Principaux nouveaux résultats : variances limites

Cas du disque \mathbb{D} : idée de preuve par limite d'échelle

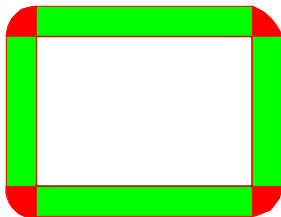
Cas du carré : idée de preuve par limite d'échelle

Grandeurs considérées

- ▶ $f_k(\cdot)$: nombre de faces k -dimensionnelles
- ▶ $\text{Vol}(\cdot)$: volume
- ▶ $V_k(\cdot)$: k -ième volume intrinsèque

Les V_k sont définis par la formule de **Steiner** :

$$\text{Vol}(K + B(0, r)) = \sum_{k=0}^d r^{d-k} \kappa_{d-k} V_k(K), \quad \text{où } \kappa_d := \text{Vol}(\mathbb{B}^d)$$



$$d = 2 : A(K + B(0, r)) = A(K) + P(K)r + \pi r^2$$

Résultats asymptotiques connus en espérance

Relation de B. Efron (1965) $\mathbb{E}f_0(\overline{K}_n) = n \left(1 - \frac{\mathbb{E}\text{Vol}(\overline{K}_{n-1})}{\text{Vol}(K)} \right)$

Uniforme, K lisse $\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c_{d,k} \int_{\partial K} \kappa_s^{\frac{1}{d+1}} ds \lambda^{\frac{d-1}{d+1}}$

$\kappa_s :=$ courbure gaussienne de ∂K

Uniforme, K polytope $\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c'_{d,k} F(K) \log^{d-1}(\lambda)$

$F(K) :=$ nombre de drapeaux de K

Gaussien $\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c''_{d,k} \log^{\frac{d-1}{2}}(\lambda)$

Résultats asymptotiques connus du second ordre

► Théorèmes centraux limites

► Encadrements de variances

$$\textit{Uniforme, } K \textit{ lisse} \quad \text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} \Theta(\lambda^{\frac{d-1}{d+1}})$$

$$\textit{Uniforme, } K \textit{ polytope} \quad \text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} \Theta(\log^{d-1}(\lambda))$$

$$\textit{Gaussien} \quad \text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} \Theta(\log^{\frac{d-1}{2}}(\lambda))$$

Principaux nouveaux résultats : variances limites

Uniforme, K lisse

$$\text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c_{d,k} \int_{\partial K} \kappa_s^{\frac{1}{d+1}} ds \lambda^{\frac{d-1}{d+1}}$$

κ_s := courbure gaussienne de ∂K

Uniforme, K polytope simple

$$\text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c'_{d,k} f_0(K) \log^{d-1}(\lambda)$$

$F(K)$:= nombre de drapeaux de K

Gaussien

$$\text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c''_{d,k} \log^{\frac{d-1}{2}}(\lambda)$$

Remarques

- ▶ Dépoissonnisation dans les cas uniforme lisse et gaussien
- ▶ Théorèmes centraux limites
- ▶ Cas uniforme dans la boule et gaussien : principe d'invariance pour le volume

Polytopes aléatoires : état de l'art et nouveaux calculs de variance

Cas du disque \mathbb{D} : idée de preuve par limite d'échelle

Calcul de la variance de $f_k(K_\lambda)$

Changement d'échelle

Caractérisation duale des points extrémaux

Action du changement d'échelle

Convergence des covariances de scores

Cas du carré : idée de preuve par limite d'échelle

Calcul de l'espérance de $f_k(K_\lambda)$

- ▶ Décomposition:

$$\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)] = \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathcal{P}_\lambda} \xi(x, \mathcal{P}_\lambda) \right]$$

$$\xi(x, \mathcal{P}_\lambda) := \begin{cases} \frac{1}{k+1} \#k\text{-face contenant } x & \text{si } x \text{ extrémal} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ formule de Mecke-Slivnyak

$$\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)] = \lambda \int_{\mathbb{D}} \mathbb{E}[\xi(x, \mathcal{P}_\lambda \cup \{x\})] dx$$

Calcul de la variance de $f_k(K_\lambda)$

$$\begin{aligned} & \text{Var}[f_k(K_\lambda)] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathcal{P}_\lambda} \xi^2(x, \mathcal{P}_\lambda) + \sum_{x \neq y \in \mathcal{P}_\lambda} \xi(x, \mathcal{P}_\lambda) \xi(y, \mathcal{P}_\lambda) \right] - (\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)])^2 \\ &= \lambda \int_{\mathbb{D}} \mathbb{E}[\xi^2(x, \mathcal{P}_\lambda \cup \{x\})] dx \\ & \quad + \lambda^2 \iint_{(\mathbb{D})^2} \mathbb{E}[\xi(x, \mathcal{P}_\lambda \cup \{x, y\}) \xi(y, \mathcal{P}_\lambda \cup \{x, y\})] dx dy \\ & \quad - \lambda^2 \iint_{(\mathbb{D})^2} \mathbb{E}[\xi(x, \mathcal{P}_\lambda \cup \{x\})] \mathbb{E}[\xi(y, \mathcal{P}_\lambda \cup \{y\})] dx dy \\ &= \lambda \int_{\mathbb{D}} \mathbb{E}[\xi^2(x, \mathcal{P}_\lambda \cup \{x\})] dx \\ & \quad + \lambda^2 \iint_{(\mathbb{D})^2} \text{Cov}(\xi(x, \mathcal{P}_\lambda \cup \{x\}), \xi(y, \mathcal{P}_\lambda \cup \{y\})) dx dy \end{aligned}$$

Changement d'échelle

Question. Limites de $\mathbb{E}[\xi(x, \mathcal{P}_\lambda)]$ et $\text{Cov}(\xi(x, \mathcal{P}_\lambda), \xi(y, \mathcal{P}_\lambda))$?

Réponse. Définition de scores limites dans un nouvel espace

► *Changement d'échelle :*

$$T^\lambda : \begin{cases} \mathbb{D} \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ x = (r, \theta) & \longmapsto (\lambda^{\frac{1}{3}}\theta, \lambda^{\frac{2}{3}}(1-r)) \end{cases}$$

► *Image d'un score :* $\xi^{(\lambda)}(T^\lambda(x), T^\lambda(\mathcal{P}_\lambda)) := \xi(x, \mathcal{P}_\lambda)$

► *Convergence de \mathcal{P}_λ :* $T^\lambda(\mathcal{P}_\lambda) \xrightarrow{D} \mathcal{P}$ où

$\mathcal{P} :=$ processus ponctuel de Poisson d'intensité dx dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

Caractérisation duale des points extrémaux

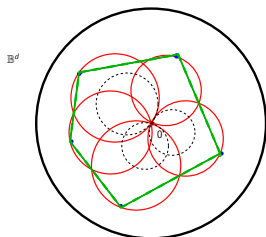
Quand K_λ contient l'origine,

$x \in \mathcal{P}_\lambda$ extrémal

$\iff \exists D$ droite d'appui de K_λ , $x \in D$

$\iff \exists y \in \partial B\left(\frac{x}{2}, \frac{\|x\|}{2}\right)$ tel que 0 et $\mathcal{P}_\lambda \setminus \{x\}$ du même côté de $(x + y)^\perp$

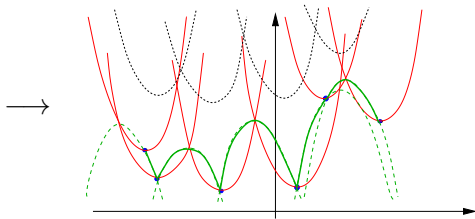
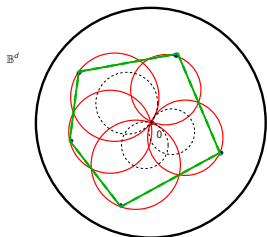
\iff le **pétale** de x , $B\left(\frac{x}{2}, \frac{\|x\|}{2}\right) \not\subset \bigcup_{x' \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \{x\}} B\left(\frac{x'}{2}, \frac{\|x'\|}{2}\right)$



Action du changement d'échelle

$$\Pi^\uparrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : h \geq \frac{v^2}{2}\}, \quad \Pi^\downarrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : h \leq -\frac{v^2}{2}\}$$

Demi-plan	Translaté de Π^\downarrow
Frontière de l'enveloppe	Union de portions of paraboles vers le bas
Pétale	Translaté de $\partial\Pi^\uparrow$
Point extrémal	$(x + \Pi^\uparrow)$ non recouverte



Convergence des covariances de scores

- ▶ Scores $\xi^{(\infty)}(w, \mathcal{P})$, $w \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, définis dans le modèle limite
- ▶ Ces scores stabilisent exponentiellement.

Rayon de stabilisation $R(w, \mathcal{P})$:

plus petit $r > 0$ tel que $\xi^{(\infty)}(w, \mathcal{P}) = \xi^{(\infty)}(w, \mathcal{P} \cap \text{Cyl}(w, r))$

$$\mathbb{P}[R(w, \mathcal{P}) > t] \leq ce^{-\frac{t}{c}}, \quad t > 0$$

- ▶ Convergence simple dans l'intégrale

$$\mathbb{E}[\xi^{(\lambda)}(w, T^\lambda(\mathcal{P}_\lambda))] \rightarrow \mathbb{E}[\xi^{(\infty)}(w, \mathcal{P})]$$

et

$$\text{Cov}(\xi^{(\lambda)}(w, T^\lambda(\mathcal{P}_\lambda)), \xi^{(\lambda)}(w', T^\lambda(\mathcal{P}_\lambda))) \rightarrow \text{Cov}(\xi^{(\infty)}(w, \mathcal{P}), \xi^{(\infty)}(w', \mathcal{P}))$$

Polytopes aléatoires : état de l'art et nouveaux calculs de variance

Cas du disque \mathbb{D} : idée de preuve par limite d'échelle

Cas du carré : idée de preuve par limite d'échelle

- Corps flottant

- Additivité de la variance sur les sommets

- Changement d'échelle au voisinage d'un sommet

- Caractérisation duale des points extrémaux

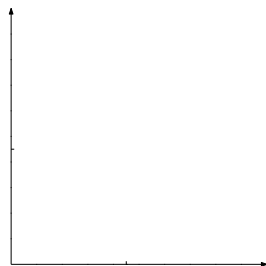
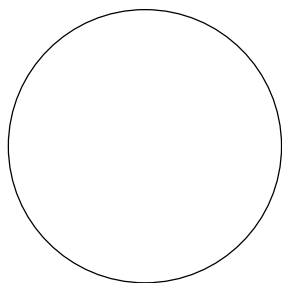
- Action du changement d'échelle

Corps flottant

$v(x) := \inf\{\text{Vol}(K \cap H^+) : H^+ \text{ demi-plan contenant } x\}, x \in K$

Corps flottant : $K(v \geq t) := \{x \in K : v(x) \geq t\}$

$K(v \geq t)$ est un corps convexe et $K(v \geq 1/\lambda)$ est *proche* de K_λ .

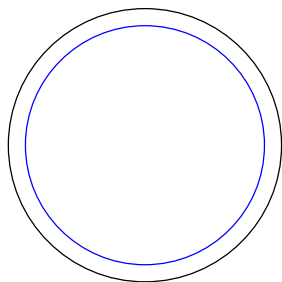


Corps flottant

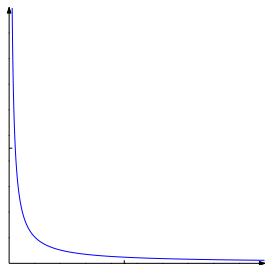
$v(x) := \inf\{\text{Vol}(K \cap H^+) : H^+ \text{ demi-plan contenant } x\}, x \in K$

Corps flottant : $K(v \geq t) := \{x \in K : v(x) \geq t\}$

$K(v \geq t)$ est un corps convexe et $K(v \geq 1/\lambda)$ est *proche* de K_λ .



$$\mathbb{D}(v \geq 1/\lambda) = (1 - f(\lambda))\mathbb{D}$$
$$f(\lambda) \sim c\lambda^{-\frac{2}{3}}$$



Comparaison entre K_λ et le corps flottant

► *Espérance*

Bárány & Larman (1988):

$$c \text{Vol}(K(v \leq 1/\lambda)) \leq \text{Vol}(K) - \mathbb{E}[\text{Vol}(K_\lambda)] \leq C \text{Vol}(K(v \leq 1/\lambda))$$

► *Variance*

Bárány & Reitzner (2010):

$$c\lambda^{-1} \text{Vol}(K(v \leq 1/\lambda)) \leq \text{Var}[\text{Vol}(K_\lambda)]$$

► *Sandwiching*

Bárány & Reitzner (2010b):

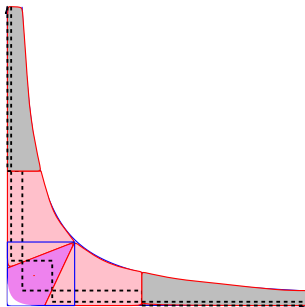
$$\mathbb{P}[\partial K_\lambda \not\subset [K(v \geq s) \setminus K(v \geq T)]] = O((\log(\lambda))^{-16})$$

$$s := \frac{c}{\lambda(\log(\lambda))^{17}}, \quad T := c' \frac{\log(\log(\lambda))}{\lambda}$$

Additivité de la variance sur les sommets

- ▶ $\mathcal{V}(K) :=$ ensemble des sommets de K
- ▶ $p_\delta(v) :=$ parallépipède de volume δ^d en v où $\delta = \exp(-(\log^{\frac{1}{2}}(\lambda)))$
- ▶ $Z_v := (k+1)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{P}_\lambda \cap p_\delta(v)} \#\{k\text{-faces containing } x\}$

$$\text{Var}[f_k(K_\lambda)] = \sum_{v \in \mathcal{V}(K)} \text{Var}[Z_v] + o(\text{Var}[f_k(K_\lambda)]).$$



Changement d'échelle au voisinage d'un sommet

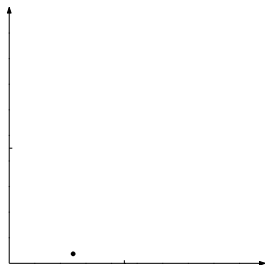
- ▶ K identifié à $(0, \infty)^2$ après changement d'échelle

Corps flottant $K(v = \frac{t}{\lambda}) = \{(z_1, z_2) \in (0, \infty)^2 : z_1 z_2 = \frac{t}{2\lambda}\}$

$V := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\} \cong \mathbb{R}$

- ▶ *Changement d'échelle* :

$$T^{(\lambda)} : \begin{cases} (0, \infty)^2 & \longrightarrow V \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto (\text{proj}_V(\log(z)), \frac{1}{2} \log(\lambda z_1 z_2)) \end{cases}$$



Changement d'échelle au voisinage d'un sommet

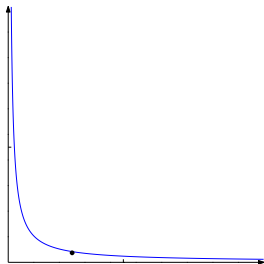
- ▶ K identifié à $(0, \infty)^2$ après changement d'échelle

Corps flottant $K(v = \frac{t}{\lambda}) = \{(z_1, z_2) \in (0, \infty)^2 : z_1 z_2 = \frac{t}{2\lambda}\}$

$V := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\} \cong \mathbb{R}$

- ▶ *Changement d'échelle* :

$$T^{(\lambda)} : \begin{cases} (0, \infty)^2 & \longrightarrow V \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto (\text{proj}_V(\log(z)), \frac{1}{2} \log(\lambda z_1 z_2)) \end{cases}$$



Changement d'échelle au voisinage d'un sommet

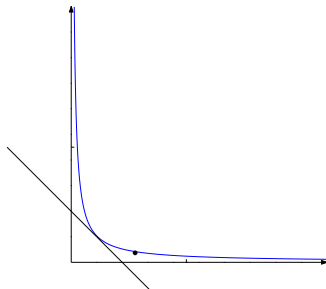
- K identifié à $(0, \infty)^2$ après changement d'échelle

Corps flottant $K(v = \frac{t}{\lambda}) = \{(z_1, z_2) \in (0, \infty)^2 : z_1 z_2 = \frac{t}{2\lambda}\}$

$V := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\} \cong \mathbb{R}$

- *Changement d'échelle* :

$$T(\lambda) : \begin{cases} (0, \infty)^2 & \longrightarrow V \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto (\text{proj}_V(\log(z)), \frac{1}{2} \log(\lambda z_1 z_2)) \end{cases}$$



Changement d'échelle au voisinage d'un sommet

- ▶ K identifié à $(0, \infty)^2$ après changement d'échelle

Corps flottant $K(v = \frac{t}{\lambda}) = \{(z_1, z_2) \in (0, \infty)^2 : z_1 z_2 = \frac{t}{2\lambda}\}$

$V := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\} \cong \mathbb{R}$

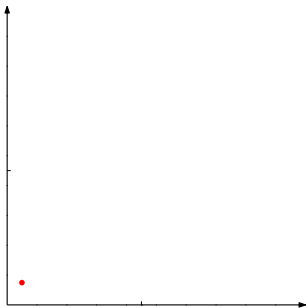
- ▶ *Changement d'échelle* :

$$T^{(\lambda)} : \begin{cases} (0, \infty)^2 & \longrightarrow & V \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (\text{proj}_V(\log(z)), \frac{1}{2} \log(\lambda z_1 z_2)) \end{cases}$$

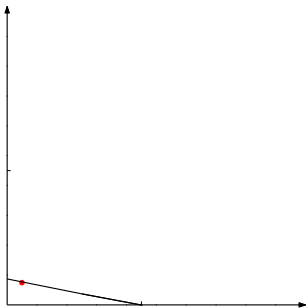
- ▶ *Convergence de \mathcal{P}_λ* : $T^\lambda(\mathcal{P}_\lambda) \xrightarrow{D} \mathcal{P}$ où

$\mathcal{P} :=$ processus ponctuel de Poisson dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de mesure d'intensité $\sqrt{d}e^{dh}dv dh$

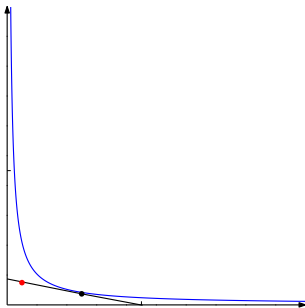
Caractérisation duale des points extrémaux



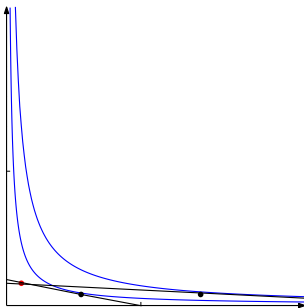
Caractérisation duale des points extrémaux



Caractérisation duale des points extrémaux



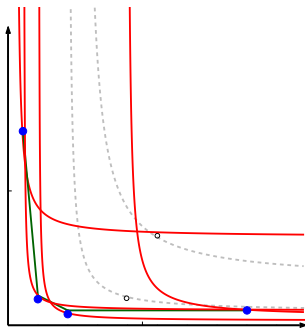
Caractérisation duale des points extrémaux



Caractérisation duale des points extrémaux

Chaque point $z \in (0, \infty)^d$ engendre un **pétale** $S(z)$, soit l'ensemble des points de tangence des courbes $K(v = \frac{t}{\lambda})$, $t > 0$ avec les droites contenant z .

z est *cône-extrémal* ssi $S(z)$ n'est pas recouvert par les autres pétales.

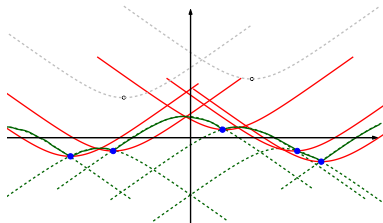
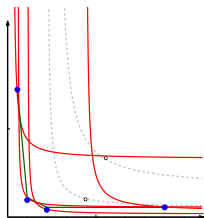


Action du changement d'échelle

$$G(v) := \log \left(\operatorname{ch} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right) \right), \quad v \in V$$

$$\Pi^\uparrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : h \geq G(v)\}, \quad \Pi^\downarrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : h \leq -G(v)\}$$

Corps flottants	Demi-plans horizontaux
Frontière de l'enveloppe	Union de portions de pseudo-cones
Pétale	Translaté de $\partial\Pi^\uparrow$
Point extrémal	$(x + \Pi^\uparrow)$ non recouvert



Merci pour votre attention !