



PDMP pour la biologie
Bertrand Cloez,
UMR Mistea

August 25, 2016



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation



- ▶ Introduit par Mark Davis:
Piecewise-Deterministic Markov Processes: A General Class of Non-Diffusion Stochastic Models (1984)



- ▶ Introduit par Mark Davis:
Piecewise-Deterministic Markov Processes: A General Class of Non-Diffusion Stochastic Models (1984)
- ▶ Processus qui évolue de manière déterministe entre des sauts aléatoires
- ▶ Pas de partie diffusive

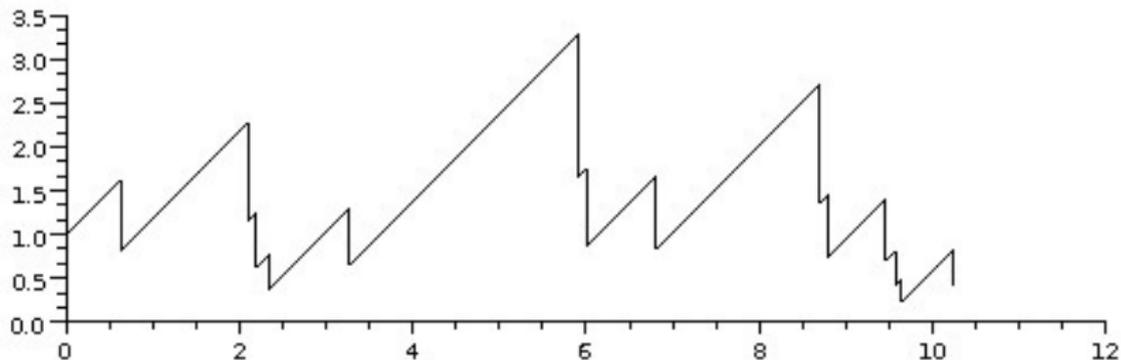


- ▶ Introduit par Mark Davis:
Piecewise-Deterministic Markov Processes: A General Class of Non-Diffusion Stochastic Models (1984)
- ▶ Processus qui évolue de manière déterministe entre des sauts aléatoires
- ▶ Pas de partie diffusive
- ▶ Comprend les chaînes de Markov à temps continu, processus modulé (*switching processes*), certains processus de Hawkes, de Lévy ...



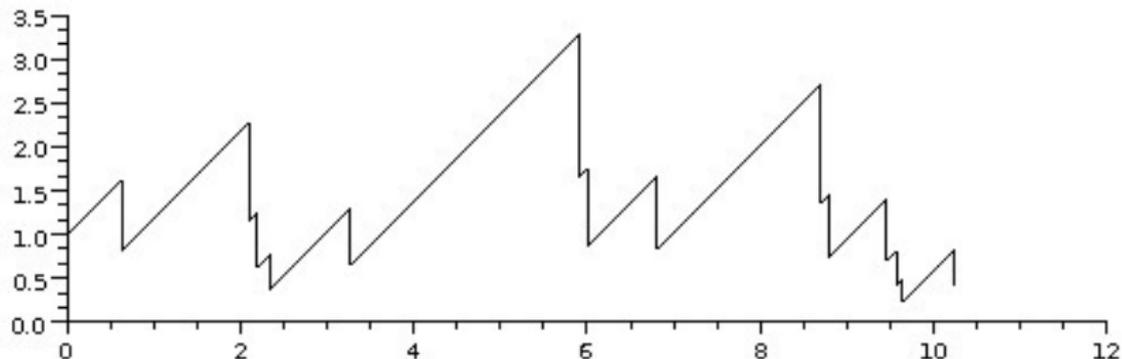
- ▶ Introduit par Mark Davis:
Piecewise-Deterministic Markov Processes: A General Class of Non-Diffusion Stochastic Models (1984)
- ▶ Processus qui évolue de manière déterministe entre des sauts aléatoires
- ▶ Pas de partie diffusive
- ▶ Comprend les chaînes de Markov à temps continu, processus modulé (*switching processes*), certains processus de Hawkes, de Lévy ...
- ▶ Le nombre de sauts sur des intervalles compacts est fini: pas d'infinité de petits sauts.

Processus TCP



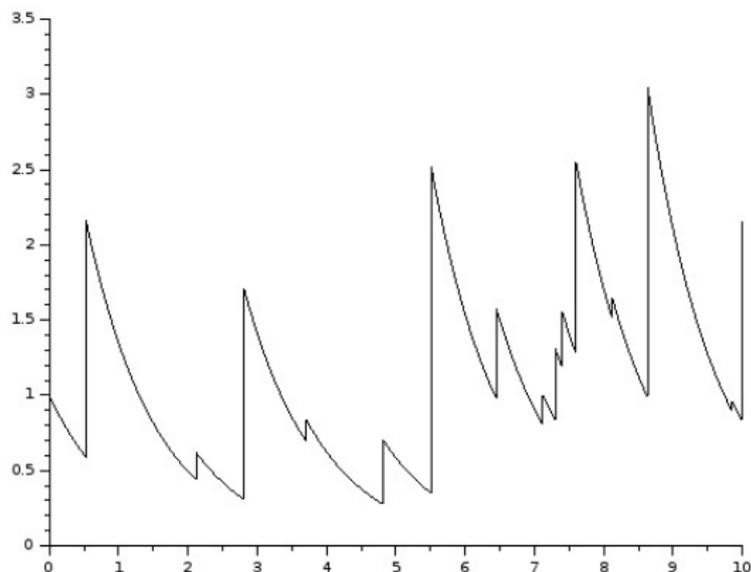
- ▶ (Ott, Kemperman, Mathis, 96), (Dumas, Guillemin, Robert, 04), (van Leeuwen, Löpker, Ott, 09), (Chafaï, Malrieu, Paroux, 10)...

Processus TCP



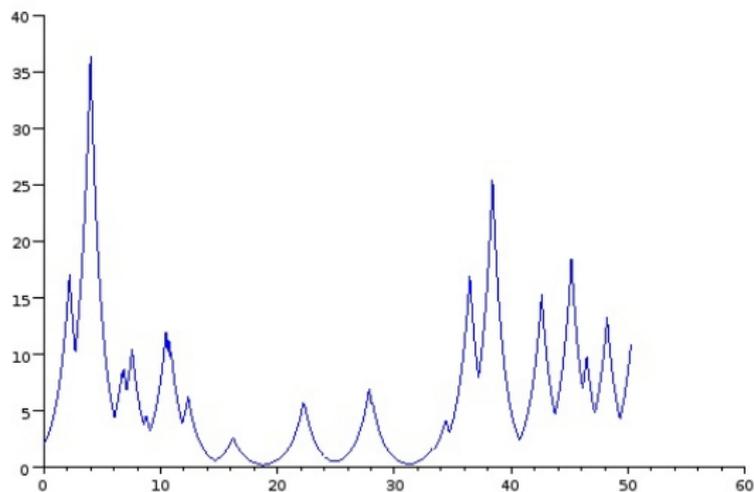
- ▶ (Ott, Kemperman, Mathis, 96), (Dumas, Guillemin, Robert, 04), (van Leeuwen, Löpker, Ott, 09), (Chafaï, Malrieu, Paroux, 10)...
- ▶ **Formule Many-to-one** : (Bansaye, Delmas, Marsalle, Tran, 10), (C.11), ([Marguet](#), 16?).

Expression d'un gène

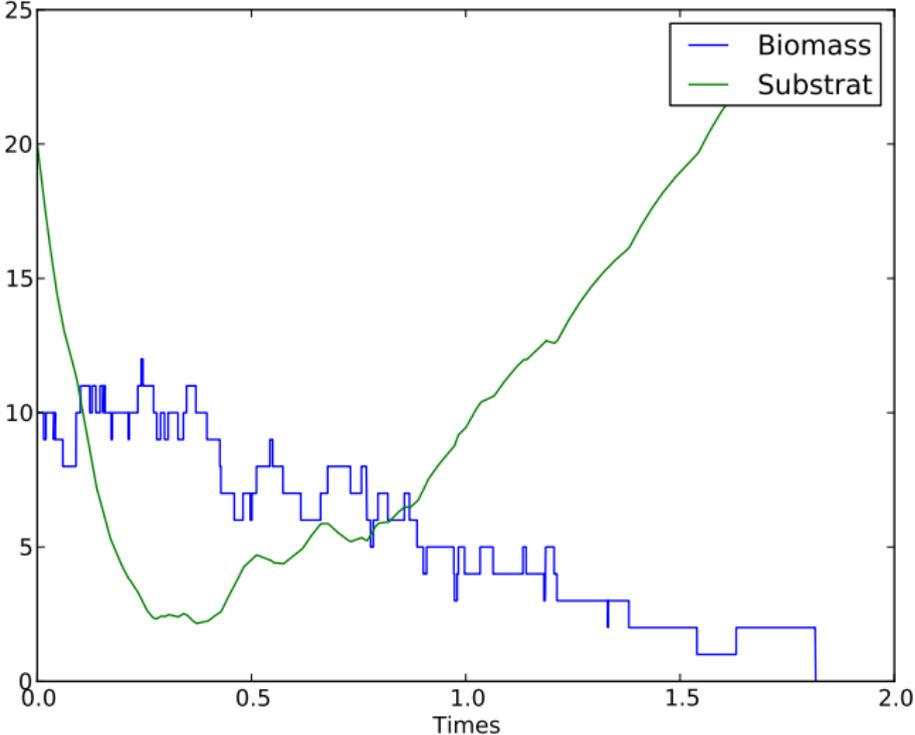


- ▶ (Yvinec, Zhuge, Lei, Mackey, 14),
([Dessalles](#), Fromion, Robert, 16)

Processus de Markov modulé (*Switching dynamical system*)



Modèle de chémostat



Quelques autre modèles (en vrac)

Liste non-exhaustive

- ▶ Contamination alimentaire
(Bouguet, 15; Bertail, Clémençon, Tressou, 08)
- ▶ Neurosciences
(Pakdaman, Thieullen, Wainrib, 10; Ditlevsen, Löcherbach, 15;
[Genadot](#), Thieullen 12)
- ▶ Généalogie/Arbres non-Markovien
(Lambert, 10; Henry, 15)

Quelques autres modèles (en vrac)

Liste non-exhaustive

- ▶ Contamination alimentaire
(Bouguet, 15; Bertail, Clémenton, Tressou, 08)
- ▶ Neurosciences
(Pakdaman, Thieullen, Wainrib, 10; Ditlevsen, Löcherbach, 15;
[Genadot](#), Thieullen 12)
- ▶ Généalogie/Arbres non-Markovien
(Lambert, 10; Henry, 15)
- ▶ D'autres applications comme la finance (Lamberton, Pagès...),
l'informatique (Graham, Robert...),...



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation

Paramètres:

- ▶ Espace d'état $E \subset \mathbb{R}^d$.
- ▶ Flot $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow E$:

$$\partial_t \Phi(x, t) = F(\Phi(x, t)).$$

- ▶ Intensité de saut $r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- ▶ Noyau de Markov $K : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Paramètres:

- ▶ Espace d'état $E \subset \mathbb{R}^d$.
- ▶ Flot $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow E$:

$$\partial_t \Phi(x, t) = F(\Phi(x, t)).$$

- ▶ Intensité de saut $r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- ▶ Noyau de Markov $K : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Dynamique: Partant de $x \in E$, on suit le flot jusqu'au temps T_1 tel que

$$\int_0^{T_1} r(\Phi(x, s)) ds = E_1 \sim \mathcal{E}(1),$$

puis on saute en $Y \sim K(\Phi(x, T_1), \cdot)$. On recommence en partant de y .

Paramètres:

- ▶ Espace d'état $E \subset \mathbb{R}^d$.
- ▶ Flot $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow E$:

$$\partial_t \Phi(x, t) = F(\Phi(x, t)).$$

- ▶ Intensité de saut $r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- ▶ Noyau de Markov $K : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Dynamique: Partant de $x \in E$, on suit le flot jusqu'au temps T_1 tel que

$$\int_0^{T_1} r(\Phi(x, s)) ds = E_1 \sim \mathcal{E}(1),$$

puis on saute en $Y \sim K(\Phi(x, T_1), \cdot)$. On recommence en partant de y .

Générateur:

$$Lf(x) = F(x) \cdot \nabla f(x) + r(x)(Kf(x) - f(x))$$

Paramètres:

- ▶ Espace d'état $E \subset \mathbb{R}^d$.
- ▶ Flot $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow E$:

$$\partial_t \Phi(x, t) = F(\Phi(x, t)).$$

- ▶ Intensité de saut $r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- ▶ Noyau de Markov $K : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Dynamique: Partant de $x \in E$, on suit le flot jusqu'au temps T_1 tel que

$$\int_0^{T_1} r(\Phi(x, s)) ds = E_1 \sim \mathcal{E}(1),$$

puis on saute en $Y \sim K(\Phi(x, T_1), \cdot)$. On recommence en partant de y .

Générateur:

$$Lf(x) = F(x) \cdot \nabla f(x) + r(x)(Kf(x) - f(x))$$

+ les problèmes de bord...



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation

Modèle

- ▶ **Environnement:** Markov irréductible I sur un ens. fini F , avec une loi inv. ν .

Modèle

- ▶ **Environnement:** Markov irréductible I sur un ens. fini F , avec une loi inv. ν .
- ▶ **Évolution de la population:** Si $I_t = i \in F$, $\partial_t X_t = F^{(i)}(X_t)$.

- ▶ **Environnement:** Markov irréductible I sur un ens. fini F , avec une loi inv. ν .
- ▶ **Évolution de la population:** Si $I_t = i \in F$, $\partial_t X_t = F^{(i)}(X_t)$.
- ▶ **Exemples:**
 - ▶ croissance malthusienne:

$$E = \mathbb{R}_+, \quad F^{(i)}(x) = a_i x, \quad a_i \in \mathbb{R};$$

- ▶ Lotka-Volterra:

$$E = \mathbb{R}_+^2, \quad F^{(i)}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_i x(1 - a_i x - b_i y) \\ \beta_i x(1 - c_i x - d_i y) \end{pmatrix}, \quad a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+;$$

- ▶ **Générateur:**

$$Lf(x, i) = F_i(x) \cdot \nabla_x f(x, i) + \sum_{j \in F} Q_{i,j} (f(x, j) - f(x, i))$$



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation

1er environnement

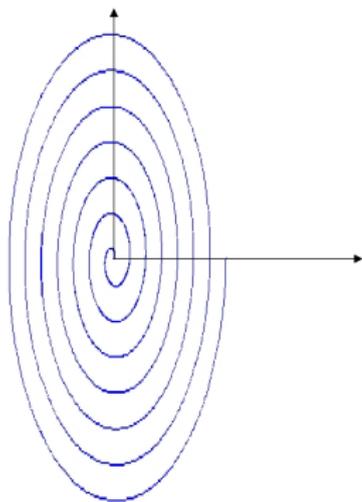


Figure : $F^{(1)} : x \mapsto A_1 \cdot x$

2ème environnement

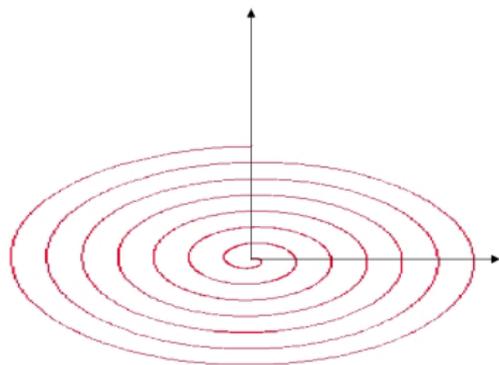


Figure : $F^{(2)} : x \mapsto A_2 \cdot x$

Dynamique modulé

- ▶ Taux de saut constant = $a > 0$;
- ▶ Champ de vecteur: $F(x) = A_i \cdot x, i \in \{1, 2\}, x \in \mathbb{R}^2$.

Dynamique modulé

- ▶ Taux de saut constant = $a > 0$;
- ▶ Champ de vecteur: $F(x) = A_i \cdot x, i \in \{1, 2\}, x \in \mathbb{R}^2$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, les solutions de

$$\forall t \geq 0, \partial_t y_t = A_i y_t$$

satisfont

$$\|y_t\| \leq C e^{-t} \|y_0\|.$$

Dynamique modulé

- ▶ Taux de saut constant = $a > 0$;
- ▶ Champ de vecteur: $F(x) = A_i \cdot x$, $i \in \{1, 2\}, x \in \mathbb{R}^2$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, les solutions de

$$\forall t \geq 0, \partial_t y_t = A_i y_t$$

satisfont

$$\|y_t\| \leq C e^{-t} \|y_0\|.$$

Néanmoins si a est grand alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t = +\infty,$$

Voir (Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt 14), (Lawley, Mattingly, Reed, 14).

Dynamique modulé

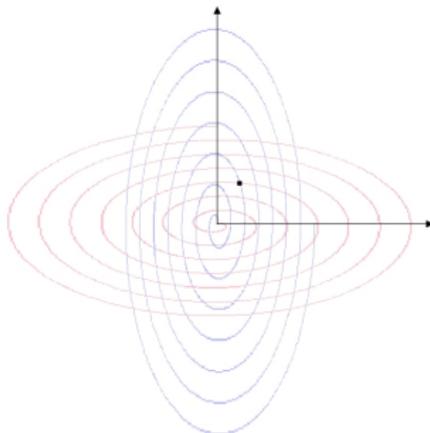


Figure : Trajectoire typique

Dynamique modulé

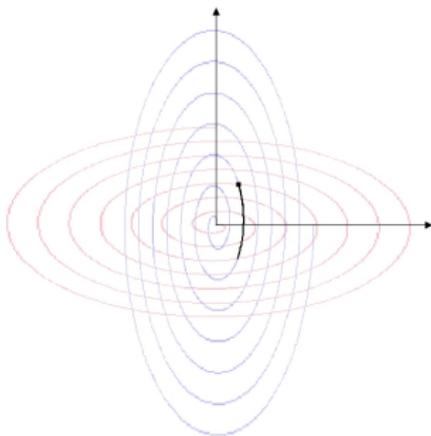


Figure : Trajectoire typique

Dynamique modulé

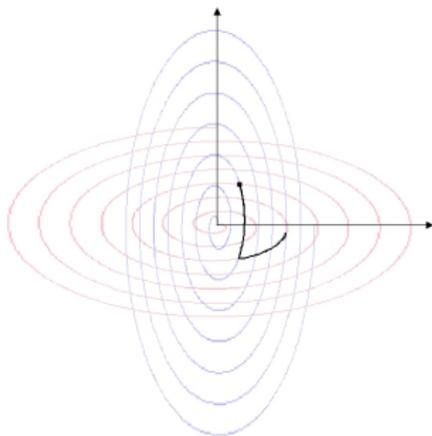


Figure : Trajectoire typique

Dynamique modulé

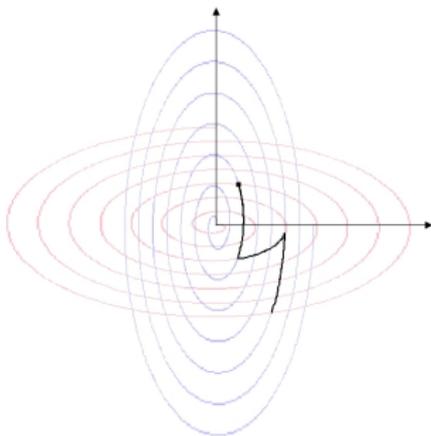


Figure : Trajectoire typique

Dynamique modulé

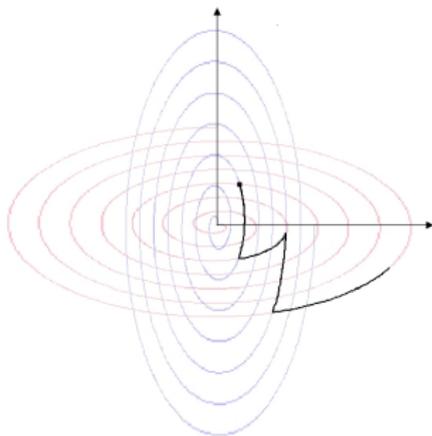


Figure : Trajectoire typique



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation

Un résultat de convergence

Supposons que $\forall i \in F, \exists \rho(i) \in \mathbb{R}$

$$\langle x - y, F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y) \rangle \leq -\rho(i)\|x - y\|^2, \quad x, y \in R^d,$$

Un résultat de convergence

Supposons que $\forall i \in F, \exists \rho(i) \in \mathbb{R}$

$$\langle x - y, F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y) \rangle \leq -\rho(i) \|x - y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

Theorem

Si

$$\sum_{i \in F} \nu(i) \rho(i) > 0,$$

alors $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} = (X_t, I_t)_{t \geq 0}$ admet une unique loi invariante et il y a convergence exponentielle dans une distance de Wasserstein.

Un résultat de convergence

Supposons que $\forall i \in F, \exists \rho(i) \in \mathbb{R}$

$$\langle x - y, F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y) \rangle \leq -\rho(i) \|x - y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

Theorem

Si

$$\sum_{i \in F} \nu(i) \rho(i) > 0,$$

alors $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} = (X_t, I_t)_{t \geq 0}$ admet une unique loi invariante et il y a convergence exponentielle dans une distance de Wasserstein.

- ▶ (Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt, 12) et (C., Hairer, 15)
↪ Preuve basée sur une généralisation d'Harris

Un résultat de convergence

Supposons que $\forall i \in F, \exists \rho(i) \in \mathbb{R}$

$$\langle x - y, F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y) \rangle \leq -\rho(i) \|x - y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

Theorem

Si

$$\sum_{i \in F} \nu(i) \rho(i) > 0,$$

alors $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} = (X_t, I_t)_{t \geq 0}$ admet une unique loi invariante et il y a convergence exponentielle dans une distance de Wasserstein.

- ▶ (Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt, 12) et (C., Hairer, 15)
 - ↪ Preuve basée sur une généralisation d'Harris
 - ↪ taux non constant + condition asymptotique

Un résultat de convergence

Supposons que $\forall i \in F, \exists \rho(i) \in \mathbb{R}$

$$\langle x - y, F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y) \rangle \leq -\rho(i) \|x - y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

Theorem

Si

$$\sum_{i \in F} \nu(i) \rho(i) > 0,$$

alors $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} = (X_t, I_t)_{t \geq 0}$ admet une unique loi invariante et il y a convergence exponentielle dans une distance de Wasserstein.

- ▶ (Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt, 12) et (C., Hairer, 15)
↪ Preuve basée sur une généralisation d'Harris
↪ taux non constant + condition asymptotique
- ▶ Hörmander : (Bakhtin, Hurth, 12), (Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt, 15)

Un résultat de convergence

Supposons que $\forall i \in F, \exists \rho(i) \in \mathbb{R}$

$$\langle x - y, F^{(i)}(x) - F^{(i)}(y) \rangle \leq -\rho(i) \|x - y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

Theorem

Si

$$\sum_{i \in F} \nu(i) \rho(i) > 0,$$

alors $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} = (X_t, I_t)_{t \geq 0}$ admet une unique loi invariante et il y a convergence exponentielle dans une distance de Wasserstein.

- ▶ (Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt, 12) et (C., Hairer, 15)
↪ Preuve basée sur une généralisation d'Harris
↪ taux non constant + condition asymptotique
- ▶ Hörmander : (Bakhtin, Hurth, 12), (Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt, 15)
- ▶ Lotka-Volterra : (Benaïm, Lobry, 16), (Malrieu, Zitt, 16), (Malrieu, Phu, 16)



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation

Chemostat/Batch ?



Figure : Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement (Narbonne)



Figure : Sciences Pour l'Œnologie (Montpellier)



Modèle de Crump-Young

- ▶ Y_t = nombre de bactéries.
↪ processus aléatoire à valeurs discrètes
 - ▶ Taux de naissance par individu = $\mu(S_t)$
 - ▶ Dilution \Rightarrow taux de mort par individu = D
- ▶ S_t = concentration de substrat
↪ processus continu et "déterministe"
 - ▶ Évolution du substrat:

$$\dot{S}_t = D(s_{in} - S_t) - C\mu(S_t)Y_t$$

- ▶ Fonction de Monod

$$\mu(s) = \bar{\mu} \frac{s}{s + K}$$

Modèle de Crump-Young

- ▶ Y_t = nombre de bactéries.
↪ processus aléatoire à valeurs discrètes
 - ▶ Taux de naissance par individu = $\mu(S_t)$
 - ▶ Dilution \Rightarrow taux de mort par individu = D
- ▶ S_t = concentration de substrat
↪ processus continu et "déterministe"
 - ▶ Évolution du substrat:

$$\dot{S}_t = D(s_{in} - S_t) - C\mu(S_t)Y_t$$

- ▶ Fonction de Monod

$$\mu(s) = \bar{\mu} \frac{s}{s + K}$$

- ▶ Introduit en 1979; cas particulier d'un modèle infini-dimensionnel (IBM) dans (Campillo, Fritsch, 15).

Modèle de Crump-Young

- ▶ Y_t = nombre de bactéries.
↪ processus aléatoire à valeurs discrètes
 - ▶ Taux de naissance par individu = $\mu(S_t)$
 - ▶ Dilution \Rightarrow taux de mort par individu = D
- ▶ S_t = concentration de substrat
↪ processus continu et "déterministe"
 - ▶ Évolution du substrat:

$$\dot{S}_t = D(s_{in} - S_t) - C\mu(S_t)Y_t$$

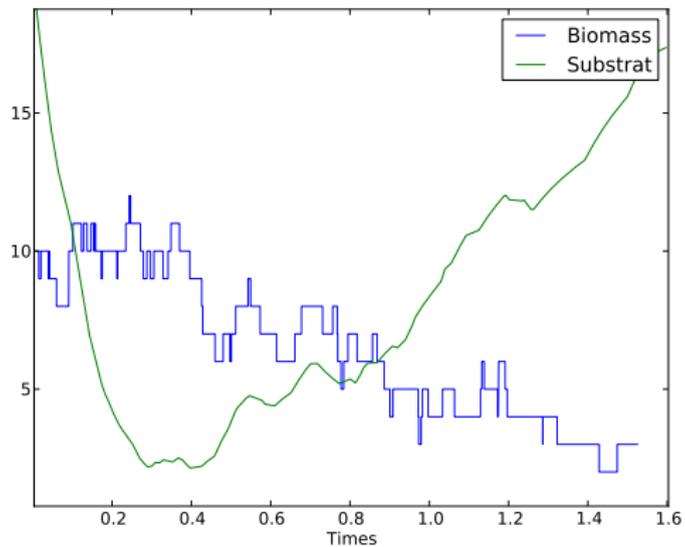
- ▶ Fonction de Monod

$$\mu(s) = \bar{\mu} \frac{s}{s + K}$$

- ▶ Introduit en 1979; cas particulier d'un modèle infini-dimensionnel (IBM) dans (Campillo, Fritsch, 15).
- ▶ Version microscopique de

$$\begin{cases} \dot{Y}_t &= (\mu(S_t) - D)Y_t \\ \dot{S}_t &= D(s_{in} - S_t) - C\mu(S_t)Y_t \end{cases}$$

Modèle de Crump-Young





Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation

Comportement en temps long

► **Générateur:**

$$Lf(y, s) = [D(s_{in} - s) - C\mu(s)y]\partial_s f(y, s) \\ + \mu(s)y(f(y + 1, s) - f(y, s)) + Dy(f(y - 1, s) - f(y, s))$$

Comportement en temps long

► **Générateur:**

$$Lf(y, s) = [D(s_{in} - s) - C\mu(s)y]\partial_s f(y, s) \\ + \mu(s)y(f(y + 1, s) - f(y, s)) + Dy(f(y - 1, s) - f(y, s))$$

► Extinction p.s. : $\exists T, \forall t \geq T, Y_t = 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = s_{in};$$

i.e. $\delta_{(0, s_{in})}$ unique loi invariante.

Comportement en temps long

► **Générateur:**

$$Lf(y, s) = [D(s_{in} - s) - C\mu(s)y]\partial_s f(y, s) \\ + \mu(s)y(f(y + 1, s) - f(y, s)) + Dy(f(y - 1, s) - f(y, s))$$

- Extinction p.s. : $\exists T, \forall t \geq T, Y_t = 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = s_{in};$$

i.e. $\delta_{(0, s_{in})}$ unique loi invariante.

- Distribution quasi-stationnaire ν ? i.e. ν tq si $(Y_0, S_0) \sim \nu$ alors

$$\mathcal{L}(Y_t, S_t | T > t) = \nu.$$

Comportement en temps long

- **Générateur:**

$$Lf(y, s) = [D(s_{in} - s) - C\mu(s)y]\partial_s f(y, s) \\ + \mu(s)y(f(y + 1, s) - f(y, s)) + Dy(f(y - 1, s) - f(y, s))$$

- Extinction p.s. : $\exists T, \forall t \geq T, Y_t = 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = s_{in};$$

i.e. $\delta_{(0, s_{in})}$ unique loi invariante.

- Distribution quasi-stationnaire ν ? i.e. ν tq si $(Y_0, S_0) \sim \nu$ alors

$$\mathcal{L}(Y_t, S_t | T > t) = \nu.$$

- Existence d'une QSD, pas d'unicité, ni de convergence
- Voir (Collet, Martínez, Méléard, San Martìn, 12).



Processus de Markov déterministe par morceaux

Définition et exemples rapides

Construction générale

Croissance de population en environnement aléatoire

Modèle

Un exemple

Un théorème

Modèle avec interaction: le chémostat

Modèle

Comportement en temps long

Approximation

Approximation (C., Fritsch, 2016)

- On peut montrer que

$$N_t^n \approx n N_t + \sqrt{n} Q_t, \quad S_t^n \approx S_t + \frac{1}{\sqrt{n}} R_t, \quad (1)$$

avec

$$\begin{cases} dN_t &= (\mu(S_t) - D) N_t dt, \\ dS_t &= [D (s_{in} - S_t) - C \mu(S_t) N_t] dt, \\ dQ_t &= [(\mu(S_t) - D) Q_t + \mu'(S_t) R_t N_t] dt + \sqrt{(\mu(S_t) + D) N_t} dB_t, \\ dR_t &= -[D R_t + C \mu(S_t) Q_t + C R_t \mu'(S_t) N_t] dt. \end{cases} \quad (2)$$

Approximation (C., Fritsch, 2016)

- On peut montrer que

$$N_t^n \approx n N_t + \sqrt{n} Q_t, \quad S_t^n \approx S_t + \frac{1}{\sqrt{n}} R_t, \quad (1)$$

avec

$$\begin{cases} dN_t &= (\mu(S_t) - D) N_t dt, \\ dS_t &= [D (s_{in} - S_t) - C \mu(S_t) N_t] dt, \\ dQ_t &= [(\mu(S_t) - D) Q_t + \mu'(S_t) R_t N_t] dt + \sqrt{(\mu(S_t) + D) N_t} dB_t, \\ dR_t &= -[D R_t + C \mu(S_t) Q_t + C R_t \mu'(S_t) N_t] dt. \end{cases} \quad (2)$$

- Et donc que (N_t^n, S_t^n) est, pour n et t grand, proche d'être Gaussien.

Approximation (C., Fritsch, 2016)

- ▶ On peut montrer que

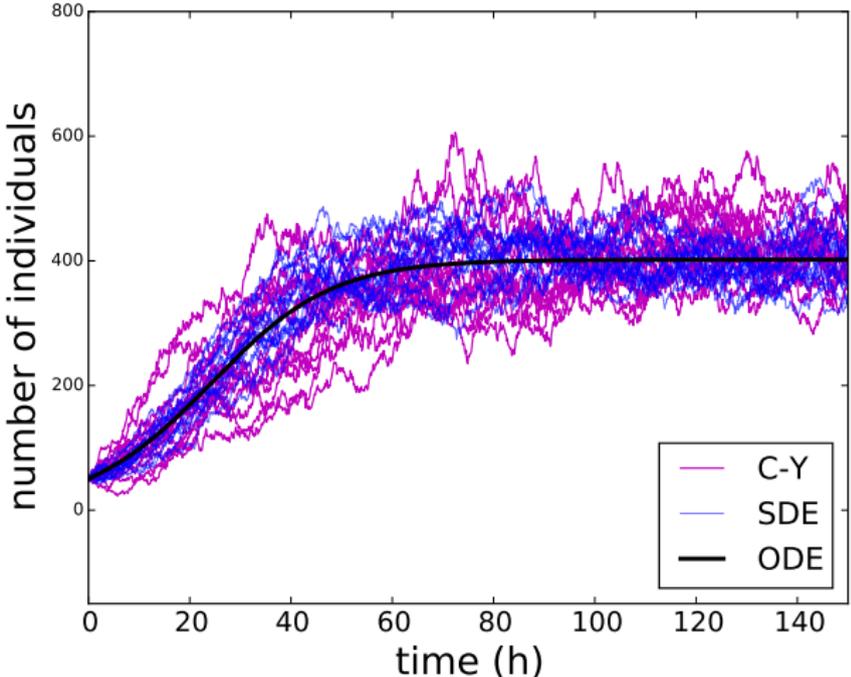
$$N_t^n \approx n N_t + \sqrt{n} Q_t, \quad S_t^n \approx S_t + \frac{1}{\sqrt{n}} R_t, \quad (1)$$

avec

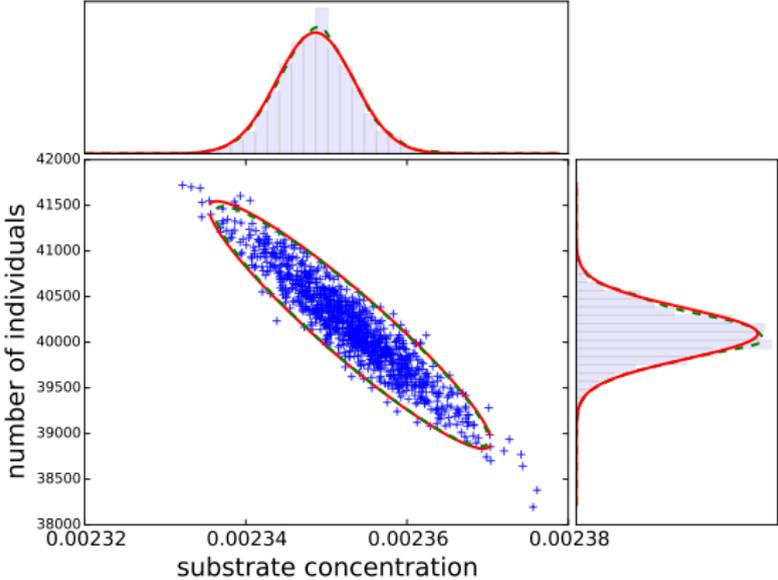
$$\begin{cases} dN_t &= (\mu(S_t) - D) N_t dt, \\ dS_t &= [D (s_{in} - S_t) - C \mu(S_t) N_t] dt, \\ dQ_t &= [(\mu(S_t) - D) Q_t + \mu'(S_t) R_t N_t] dt + \sqrt{(\mu(S_t) + D) N_t} dB_t, \\ dR_t &= -[D R_t + C \mu(S_t) Q_t + C R_t \mu'(S_t) N_t] dt. \end{cases} \quad (2)$$

- ▶ Et donc que (N_t^n, S_t^n) est, pour n et t grand, proche d'être Gaussien.
- ▶ Autre type d'approximation: ([Genadot, 2014](#)).

Modèle de Crump-Young



Modèle de Crump-Young





Merci pour votre attention!