Grandes populations d'agents contrôlés

Journées MAS Grenoble 2016

François Delarue (Nice – J.-A. Dieudonné)

29 Août 2016

Travaux communs avec R. Carmona, D. Lacker ; J.F. Chassagneux, D. Crisan ;
P. Cardaliaguet, J.M. Lasry et P.L. Lions

Part I. Motivation

Pour commencer...

- Etats d'équilibre ou états optimaux au sein de grandes populations

    ◦ population d'individus dans une foule, d'agents économiques, de cellules, de particules...

    ◦ notions d'états sont floues $\rightsquigarrow$ équilibres / optima sont cherchés par rapport à un degré de liberté laissé aux individus

- Problème complexe $\rightsquigarrow$ dimension liée à la taille de la population

    ◦ difficulté de la compréhension des modèles, difficulté de la résolution numérique

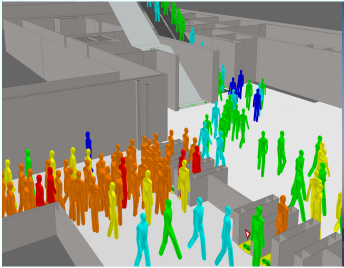
- Etude de la limite "population $\to \infty$"

    ◦ forme plus accessible ?

    ◦ dans des contextes avec symétrie, moyennisation...

Exemples typiques...

• Populations d'invidus, d'animaux...



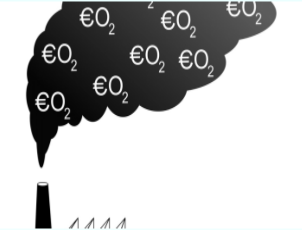

• foule dans un espace publique $\rightsquigarrow$ comportement des individus pour accéder à la sortie en cas de panique

◦ aspect pratique $\rightsquigarrow$ dimensionnement des accès d'urgence !

• nuée d'oiseaux $\rightsquigarrow$ organisation collective formée par le vol de chacun

Exemples typiques...

- Agents économiques



- producteurs d'énergie reçoivent des droits à polluer : ces droits peuvent être échangés

  ◦ si les émissions globales à la fin de la période excèdent un quota $\Rightarrow$ chaque producteur doit payer une pénalité par tonne non couverte par un droit à polluer

  ◦ nécessité pour le régulateur de fixer le quota, la pénalité... ; volonté des producteurs de maximiser leurs profits !

Résumé

- Exemples dynamiques (par opposition à statiques) avec :
  - individus ressentent les états des autres individus
  - individus cherchent à optimiser une fonctionnelle de leur état (coût, énergie, temps de sortie...)

- Hypothèse pour limiter la complexité $\rightsquigarrow$ interaction champ moyen
  - coût (ou énergie...) de i en l'état $(x^1, \cdots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \cdots, x^N)$

$$J^i(x^i, (x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^N))$$

  - J^i symétrique par rapport à l'état des autres et ne fluctuant pas trop sous l'action d'un changement unilatéral

$$J^i\Big(x^i, \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{x^j}\Big)$$

  - J^i fonction d'un état privé et d'un état collectif (probabilité) $\rightsquigarrow$ $J^i(x, \cdot)$ moyenne d'une fonction, convolution...

Part II. Un premier modèle

Optimisation de production pétrolière (Guéant, Lasry, Lions)

- Production instantanée au temps $t \rightsquigarrow \alpha_t$, $c(\alpha_t)$ = coût instantané
  - $P_t \rightsquigarrow$ prix de vente, exogène
  - profit global sur $[0, T] \rightsquigarrow \displaystyle\int_0^T [\alpha_t P_t - c(\alpha_t)]dt$
- Solution simple $\rightsquigarrow$ maximisation du profit instantané $\alpha_t P_t - c(\alpha_t)$
  - politique optimale $\rightsquigarrow \alpha_t^* = [(c')^{-1}(P_t)]_+$
- Prise en compte de la réserve X_t au temps $t \rightsquigarrow dX_t = -\alpha_t dt + \cdots$
  - $\cdots \rightsquigarrow$ erreur gaussienne locale $dX_t = -\alpha_t dt + \sigma X_t dW_t$
  - valorisation de la réserve à $T \rightsquigarrow U(X_T)$
  - maximisation du profit moyen

$$J(\alpha) = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\alpha_t P_t - c(\alpha_t))dt + U(X_T)\right]$$

Solution par HJB

- Stratégies non-anticipantes $\rightsquigarrow$ α_t dépend de l'observation jusqu'au temps t

- Problème contrôle stochastique optimal! $\rightsquigarrow$ 1960-...
  - $v(t,x)$ $\rightsquigarrow$ profit moyen optimal lorsque $X_t = x$
  - v solution d'une équation Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\partial_t v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 v(t,x) + \sup_\alpha((P_t - \partial_x v(t,x))\alpha - c(\alpha)) = 0$$

$$v(T,x) = U(x)$$

- Schéma $\rightsquigarrow$ développement de $U(X_T)$ par Itô...

- Stratégie optimale est en boucle fermée:

$$\alpha_t^\star = [(c')^{-1}(P_t - \partial_x v(t,X_t))]_+$$

  - suffisant de connaître X_t au temps t pour calculer la stratégie optimale

Problème multi-agents

- Même problème mais grand nombre de producteurs, $N \gg 1$

$$dX_t^i = -\alpha_t^i dt + \sigma X_t^i dW_t^i$$

  - même σ, bruits indépendants $W^1, \ldots, W^N$

- Jusqu'ici prix exogène $\rightsquigarrow$ maintenant prix endogène

$$P_t = P(X_t^1, \ldots, X_t^N, \alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^N)$$

  - P ne dépend que de l'état collectif : hypothèse champ moyen
  - cas simple $\rightsquigarrow$ dépendance p.r. état moyen

$$P_t = P\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_t^j, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \alpha_t^j\right)$$

Problème multi-agents

- Même problème mais grand nombre de producteurs, $N \gg 1$

$$dX_t^i = -\alpha_t^i dt + \sigma X_t^i dW_t^i$$

  - même σ, bruits indépendants $W^1, \ldots, W^N$

- Jusqu'ici prix exogène $\rightsquigarrow$ maintenant prix endogène

$$P_t = P(X_t^1, \ldots, X_t^N, \alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^N)$$

  - P ne dépend que de l'état collectif : hypothèse champ moyen
  - cas simple $\rightsquigarrow$ dépendance p.r. état moyen

$$P_t = P\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_t^j, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \alpha_t^j\right)$$

  - éventuellement $U(X_T^i) \rightsquigarrow U(X_T^i, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i} X_T^j)$

Problème multi-agents

- Même problème mais grand nombre de producteurs, $N \gg 1$

$$dX_t^i = -\alpha_t^i dt + \sigma X_t^i dW_t^i$$

  - même σ, bruits indépendants $W^1, \ldots, W^N$

- Jusqu'ici prix exogène $\rightsquigarrow$ maintenant prix endogène

$$P_t = P(X_t^1, \ldots, X_t^N, \alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^N)$$

  - P ne dépend que de l'état collectif : hypothèse champ moyen
  - cas simple $\rightsquigarrow$ dépendance p.r. état moyen

$$P_t = P\left(\tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{j=1}^N X_t^j, \tfrac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_t^j\right)$$

- Plus généralement, fonction distribution empirique $\bar{\nu}_t^N$

$$P_t = P(\bar{\nu}_t^N), \qquad \bar{\nu}_t^N = \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{i=1}^N \delta_{(X_t^i, \alpha_t^i)}$$

  - implicitement demande déterministe $\rightsquigarrow$ cas demande aléatoire

$$P_t = P(\bar{\nu}_t^N, W_t^0), \qquad (W_t^0)_{0 \le t \le T} \perp\!\!\!\perp (W_t^1, \cdots, W_t^N)_{0 \le t \le T}$$

Signification de l'optimisation?

- Chaque joueur agit individuellement pour minimiser $J^i(\alpha^1, \dots, \alpha^N)$
  - dépend des autres! $\Rightarrow$ consensus ??? $\rightsquigarrow$ équilibre de Nash
- N-uplet $(\alpha^{1,\star}, \dots, \alpha^{N,\star})$ = équilibre si aucun intérêt de le quitter
  - si changement $\alpha^{i,\star} \rightsquigarrow \alpha^i \Rightarrow J^i \searrow$

$$J^i(\alpha^{1,\star}, \dots, \alpha^{i,\star}, \dots, \alpha^{N,\star}) \leq J^i(\alpha^{1,\star}, \dots, \alpha^i, \dots \alpha^{N,\star})$$

- Signification du gel $\alpha^{1,\star}, \dots, \alpha^{i-1,\star}, \alpha^{i+1,\star}, \alpha^{N,\star}$?
  - contrôle boucle fermée $\rightsquigarrow$ $\alpha_t^i = \alpha^i(t, X_t^1, \dots, X_t^N)$ $\rightsquigarrow$ joueurs fondent leurs actions sur l'observation des autres $\rightsquigarrow$ EDS
  - gel des fonctions $\alpha^{\star,1}, \dots, \alpha^{\star,N}$
- Alternative $\Rightarrow$ les joueurs obéissent à un planificateur central
  - même fonction de retour $\alpha \Rightarrow \alpha_t^i = \alpha(t, X_t^i, \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{X_t^j})$
  - les joueurs sont échangeables $\rightsquigarrow$ profit J^i = profit collectif

Part III. Formulation Asymptotique

Heuristique

- Propagation du chaos $\rightsquigarrow$ reformulation dans le cadre contrôlé

$$dX_t^{N,i} = \alpha(t, X_t^{N,i}, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^{N,j}})dt + \sigma X_t^{N,i} dW_t^i$$

  - particules deviennent i.i.d. quand $N \to \infty$

$$dX_t = \alpha(t, X_t, \mathcal{L}(X_t))dt + \sigma X_t dW_t$$

  - un seul joueur en interaction avec sa loi (EDS McKean-Vlasov)

- Version conditionnelle si $\alpha(t, (W_s^0)_{0\leq s\leq t}, X_t^{N,i}, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^{N,j}})$
  - $\mathcal{L}(X_t) \rightsquigarrow \mathcal{L}(X_t|\boldsymbol{W}^0)$ loi conditionnelle sachant $\boldsymbol{W}^0 \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{W}$

- Conjecture pour états d'équilibre Nash / optimisation collective

$$\alpha_t^{i,\star} = \alpha^N(t, X_t^{N,i,\star}, \tfrac{1}{N-1}\textstyle\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^{N,j,\star}}) \approx \alpha(t, X_t^{i,\star}, \tfrac{1}{N-1}\textstyle\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^{N,j,\star}})$$

  - réduction asymptotique à un joueur typique

Bibliographie

• Problèmes issus de l'éonomie (Aumann (60'), Aiyagari (90'), Krusell-Smith (90's))

• Intérêt très fort en mathématiques à partir des années 2000

◦ théorie des jeux à champ moyen (MFG) : version asymptotique des équilibres de Nash (Lasry-Lions (2006–), Huang-Caines-Malhamé (2006–), ...)

◦ équations de HJB sur l'espace de Wasserstein : version asymptotique de l'optimisation collective (Nguyen, Gangbo, Swiech (2008–), Pham (2016), ...)

• Liens avec le transport optimal

◦ formule de Benamou-Brenier: coût transport optimal = coût problème optimisation collective

◦ calcul différentiel sur l'espace de Wasserstein (Otto, Villani, Ambrosi, Gigli, Savaré...) $\rightsquigarrow$ rôle pour HJB et MFG

Le point fixe des MFG

• Formulation asymptotique des équilibres de Nash sans bruit systémique pour $P_t = P(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^j})$

(1) fixer un flot de mesures de probabilité $\boldsymbol{\mu} = (\mu_t)_{0\leq t\leq T}$, candidat pour décrire un équilibre asymptotique

(2) résoudre problème de contrôle stochastique en environment $\boldsymbol{\mu}$

$$dX_t = -\alpha_t dt + \sigma X_t dW_t$$

∘ avec profit $J(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big(\alpha_t P(\mu_t) - c(\alpha_t)\Big)dt + U(X_T)\Big]$

(3) si $(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}})_{0\leq t\leq T}$ optimal $\rightsquigarrow$ trouver $\boldsymbol{\mu}$ t.q. $\mu_t = \mathcal{L}(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}}),\ t\in[0,T]$

Le point fixe des MFG

• Formulation asymptotique des équilibres de Nash sans bruit systémique pour $P_t = P(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^j})$

(1) fixer un flot de mesures de probabilité $\boldsymbol{\mu} = (\mu_t)_{0\le t\le T}$, candidat pour décrire un équilibre asymptotique

(2) résoudre problème de contrôle stochastique en environnement $\boldsymbol{\mu}$

$$dX_t = -\alpha_t dt + \sigma X_t dW_t$$

∘ avec profit $J(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big(\alpha_t P(\mu_t) - c(\alpha_t)\Big)dt + U(X_T)\Big]$

(3) si $(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}})_{0\le t\le T}$ optimal $\rightsquigarrow$ trouver $\boldsymbol{\mu}$ t.q. $\mu_t = \mathcal{L}(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}}),\ t\in[0,T]$

• Généralisations...

∘ avec demande aléatoire, $\boldsymbol{\mu}$ est $\boldsymbol{W}^0$-adapté et $\mu_t = \mathcal{L}(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}}|\boldsymbol{W}^0)$

∘ si $P_t = P(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^j}, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{\alpha_t^j})$, fixer $\boldsymbol{\mu}$ et $(\phi(t,\cdot))_{0\le t\le T}$ candidats pour fonctions “contrôle en boucle fermée” et faire le point fixe sur $\boldsymbol{\mu}$ et ϕ

Optimisation collective

- Formulation asymptotique des équilibres collectifs pour $P_t = P(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^j}, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{\alpha_t^j})$

  (1) résoudre problème de contrôle champ moyen

$$dX_t = -\alpha_t dt + \sigma X_t dW_t$$

  - avec profit $J(\alpha) = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big(\alpha_t P(\mathcal{L}(X_t, \alpha_t)) - c(\alpha_t)\Big)dt + U(X_T)\Big]$

  (2) optimiser J sur $(\alpha_t)_{0\leq t\leq T}$

- Différent de MFG $\rightsquigarrow$ vrai problème d'optimisation

Optimisation collective

- Formulation asymptotique des équilibres collectifs pour $P_t = P(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^j}, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{\alpha_t^j})$

  (1) résoudre problème de contrôle champ moyen

  $$dX_t = -\alpha_t dt + \sigma X_t dW_t$$

  ◦ avec profit $J(\alpha) = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big(\alpha_t P(\mathcal{L}(X_t,\alpha_t)) - c(\alpha_t)\Big)dt + U(X_T)\Big]$

  (2) optimiser J sur $(\alpha_t)_{0\le t\le T}$

- Différent de MFG $\rightsquigarrow$ vrai problème d'optimisation

- Connexion avec transport optimal

  ◦ $T = 1,\ P \equiv 0,\ c(\alpha) = -|\alpha|^2,\ U \rightsquigarrow U(\mu) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu \neq \mu_1 \\ 0 & \text{si } \mu = \mu_1 \end{cases}$

  ◦ $X_0 \sim \mu_0 \Rightarrow$ théorème de Benamou Brenier

  $$-\sup_{(\alpha_t)_{0\le t\le 1}} J = W_2(\mu_0,\mu_1)^2 = \inf_{X_0\sim\mu_0,\ X_1\sim\mu_1} \mathbb{E}[|X_0 - X_1|^2]$$

Solvabilité

- Mise en évidence d'équilibres / optima asymptotiques

  ◦ optimisation champ moyen $\rightsquigarrow$ adaptation des techniques fini-dimensionnelles à $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$: compacité, convexité, HJB...

  ◦ MFG $\rightsquigarrow$ mise en évidence d'un point fixe: utilisation du théorème de Schauder pour l'existence, critère ad hoc unicité

  ◦ cas "potentiel" $\rightsquigarrow$ solutions de l'optimisation champ moyen sont solutions d'un MFG avec d'autres coefficients !

- Implémentation du theorème de Schauder si $P_t = P(\mathcal{L}(X_t))$

  ◦ espace $C([0,T];\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ $\rightsquigarrow$ critère simple de compacité

Solvabilité

• Mise en évidence d'équilibres / optima asymptotiques

∘ optimisation champ moyen $\rightsquigarrow$ adaptation des techniques fini-dimensionnelles à $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$: compacité, convexité, HJB...

∘ MFG $\rightsquigarrow$ mise en évidence d'un point fixe: utilisation du théorème de Schauder pour l'existence, critère ad hoc unicité

∘ cas "potentiel" $\rightsquigarrow$ solutions de l'optimisation champ moyen sont solutions d'un MFG avec d'autres coefficients !

• Implémentation du theorème de Schauder si $P_t = P(\mathcal{L}(X_t))$

∘ espace $C([0,T];\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ $\rightsquigarrow$ critère simple de compacité

∘ + difficile si $\boldsymbol{W}^0 \rightsquigarrow C([0,T];\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))^{\Omega}$ où Ω porte $\boldsymbol{W}^0$

∘ discrétisation de $\boldsymbol{W}^0$ pour se ramener au cas Ω fini

∘ extraction d'une limite faible $\Rightarrow$ équilibre faible $\rightsquigarrow$ addition d'une information supplémentaire (Carmona, D., Lacker)

$$\mu_t = \mathcal{L}(X_t | \mathcal{F}^0), \quad \mathcal{F}^0 \text{ tribu élargie portant } (\boldsymbol{W}^0, \boldsymbol{\mu}) \text{ et } \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{W}$$

Caractérisation EDP

- Caractérisation HJB du problème de contrôle si $P_t = P(\frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{X_t^j})$

$$\partial_t v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 v(t,x) + \sup_\alpha\big((P(\mu_t) - \partial_x v(t,x))\alpha - c(\alpha)\big) = 0$$

$$v(T,x) = U(x)$$

  - Attention $\rightsquigarrow$ v dépend de $\boldsymbol{\mu} = (\mu_t)_{0\leq t\leq T}$!

- Caractérisation EDP de $\boldsymbol{\mu} = (\mu_t)_{0\leq t\leq T}$ $\rightsquigarrow$ équation de Fokker-Planck

$$\partial_t \mu_t = -\mathrm{div}\big([(c')^{-1}(P(\mu_t) - \partial_x v(t,x))]_+ \mu_t\big) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}^2(x^2\mu_t)$$

  - initial condition at time 0 $\rightsquigarrow$ μ_0 initial state of the population

- Equilibre décrit par la solution d'un système aux deux bouts $\rightsquigarrow$ version infinie dimensionnelle, analogue de

$$\begin{cases} \dot{x}_t = b(x_t, y_t), & x_0 \text{ donné} \\ \dot{y}_t = -f(x_t, y_t), & y_T = g(x_T) \end{cases}$$

  - théorie de Cauchy-Lipschitz en temps petit seulement

Construction d'un presque-équilibre

- Comment revenir au jeu à N joueurs si HJB/FP est soluble ?
- Construction d'un presque Nash

  ◦ utilisation de la fonction retour boucle fermée du problème limite:

$$\alpha^\star(t,x) = [(c')^{-1}(P(\mu_t) - \partial_x v(t,x))]_+$$

dépend de l'état de la population à l'équilibre

  ◦ dans système de N joueurs:

$$dX_t^{N,i} = \alpha^\star(t, X_t^{N,i})dt + \sigma X_t^{N,i} dW_t^i$$

  ◦ si déviation unilatérale du joueur i dans le système, alors le gain espéré est un $o_N(1) \to 0$ quand $N \to \infty$

- Application : résolution du système limite, puis injection dans jeu à N joueurs

  ◦ gain de complexité (par loi des grands nombres), stratégies distribuées

Part IV. Equation Maîtresse

Exemple d'unicité (Lasry-Lions)

- Changer J en $J(\alpha) = \mathbb{E}\Big[\int_0^T [\underbrace{-f_0(X_t,\mu_t) + c(\alpha_t)}_{f(X_t,\mu_t,\alpha_t)}]dt + U(X_T)\Big]$
  - propriété de monotonie de f_0 p.r. μ

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f_0(x,\mu) - f_0(x,\mu'))d(\mu - \mu')(x) \geq 0$$

- Exemple : Si f_0 est donné

$$f_0(x,\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} L(z, \rho \star \mu(z))\rho(x-z)dz$$

où L est $\nearrow$ en la 2e variable et ρ est un noyau de convolution pair

  - pénalise une accumulation de masse au voisinage de x

- Propriété de monotonie $\rightsquigarrow$ classique dans systèmes avant-arrière

Monotonie restaure unicité

- Si pour tout $\boldsymbol{\mu} = (\mu_t)_{0 \le t \le T}$, $\exists$ unique optimal contrôle $\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}}$
  - + existence d'un équilibre pour une condition initiale donnée
- Lasry Lions $\Rightarrow$ unicité équilibre MFG!
  - si deux équilibres $\rightsquigarrow \alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}} \neq \alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}'}$

$$\underbrace{J^{\boldsymbol{\mu}}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}})}_{\text{profit sous } \boldsymbol{\mu}} > J^{\boldsymbol{\mu}}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}'}) \quad \text{et} \quad \underbrace{J^{\boldsymbol{\mu}'}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}'})}_{\text{profit sous } \boldsymbol{\mu}'} > J^{\boldsymbol{\mu}'}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}})$$

donc
$$J^{\boldsymbol{\mu}'}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}}) - J^{\boldsymbol{\mu}'}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}'}) + J^{\boldsymbol{\mu}}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}'}) - J^{\boldsymbol{\mu}}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}}) < 0$$
$$J^{\boldsymbol{\mu}'}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}}) - J^{\boldsymbol{\mu}}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}}) - [J^{\boldsymbol{\mu}'}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}'}) - J^{\boldsymbol{\mu}}(\alpha^{\star,\boldsymbol{\mu}'})] < 0$$

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \Big(\underbrace{f_0(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}}, \mu'_T) - f_0(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}}, \mu_T)}_{\int_{\mathbb{R}} (f_0(x,\mu'_t) - f_0(x,\mu_t)) d\mu_t(x)} - \underbrace{\big(f_0(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}'}, \mu'_t) - f_0(X_t^{\star,\boldsymbol{\mu}'}, \mu_t)\big)}_{\int_{\mathbb{R}} (f_0(x,\mu'_t) - f_0(x,\mu_T)) d\mu'_t(x)} \Big) dt\Big] < 0$$

  - terme de gauche est ≥ 0

Construction de l'équation maîtresse

• Fonction valeur généralisée si existence et unicité d'un équilibre pour toute condition initiale (t, μ) dans $[0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

∘ $\mathcal{U}(t, x, \mu)$ fonction valeur en (t, x) sous équilibre $\boldsymbol{\mu}$ initialisée en μ au temps t

$$v(t, x) = \sup_{\alpha} \mathbb{E}\Big[\int_t^T [-f_0(X_s, \mu_s) + c(\alpha_s)]ds + U(X_T) \,|\, X_t = x\Big]$$

∘ μ_s : état de la population à l'équilibre à l'instant s sous condition initiale μ

• Programmation dynamique:

$$\mathcal{U}(t, x, \mu) = \sup_{\alpha} \mathbb{E}\Big[\int_t^{t+h} [-f_0(X_s, \mu_s) + c(\alpha_s)]ds + \mathcal{U}(t+h, X_{t+h}, \mu_{t+h}) \,|\, X_t = x\Big]$$

∘ développer le terme de droite en h petit $\rightsquigarrow$ EDP ?

Calcul différentiel sur l'espace de Wasserstein

- Approche due à Lions de la différentiation sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$
- Pour $\mathcal{U} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \rightsquigarrow$ relèvement

$$\hat{\mathcal{U}} : L^2(\Omega, \mathbb{P}) \ni X \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{L}(X))$$

  - $\mathcal{U}$ différentiable si $\hat{\mathcal{U}}$ Fréchet différentiable
- Différentielle de $\mathcal{U}$
  - dérivée de Fréchet de $\hat{\mathcal{U}}$

$$D\hat{\mathcal{U}}(X) = \partial_\mu \mathcal{U}(\mu)(X), \quad \partial_\mu \mathcal{U}(\mu) : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \partial_\mu \mathcal{U}(\mu)(x) \quad \mu = \mathcal{L}(X)$$

  - dérivée de $\mathcal{U}$ en $\mu \rightsquigarrow \partial_\mu \mathcal{U}(\mu) \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu; \mathbb{R}^d)$
- Projection fini-dimensionnelle

$$\partial_{x_i}\Big[\mathcal{U}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{x_j}\Big)\Big] = \frac{1}{N}\partial_\mu \mathcal{U}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{x_j}\Big)(x_i), \quad x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^d$$

Formule d'Itô sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$

- Processus $dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t, \quad \int_0^T \mathbb{E}[|b_t|^2 + |\sigma_t|^4] dt < \infty$
  - μ_t = loi de X_t
- $\hat{\mathcal{U}}$ deux fois Fréchet différentiable
  - dérivée de $(\mathcal{U}(\mu_t))_{t\geq 0}$?
- Approximation de μ_t par système de particules

$$\mu_t \sim \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_t^j} \quad \text{and} \quad d_t\Big[\mathcal{U}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_t^j}\Big)\Big]$$

  - développement du terme de droite par Itô et espérance
- Formule d'Itô (Buckdahn et al. ; Chassagneux, Crisan, D.)
  - Si $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \partial_\mu \mathcal{U}(\mu)(x) \in \mathbb{R}^d$ différentiable

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(\mu_t) = \mathbb{E}[\langle b_t, \partial_\mu \mathcal{U}(\mu_t)(X_t)\rangle] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\mathrm{Trace}(\sigma_t \sigma_t^\dagger \partial_v(\partial_\mu \mathcal{U}(\mu_t))(X_t))]$$

Forme de l'équation maîtresse

- Rappel de la forme du contrôle boucle fermée

$$\alpha^\star(t,x) = [(c')^{-1}(P(\mu_t) - \partial_x v(t,x))]_+ = [(c')^{-1}(P(\mu_t) - \partial_x \mathcal{U}(t,x,\mu_t))]_+$$
$$= \text{“ } A^\star \text{ ”}(t,x,\mu_t)$$

- Dérivation formelle $\rightsquigarrow$ équation maîtresse du 1er ordre:

$$\partial_t \mathcal{U}(t,x,\mu) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} A^\star(t,v,\mu)\partial_\mu \mathcal{U}(t,x,\mu)(v)d\mu(v)}_{\text{transport en } \mu}$$
$$\underbrace{-A^\star(t,x,\mu)\partial_x \mathcal{U}(t,x,\mu) + f(x,\mu,A^\star(t,x,\mu),\mu)}_{\text{Hamiltonian standard}}$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\underbrace{x^2\partial_x^2 \mathcal{U}(t,x,\mu)}_{\text{diffusion}} + \frac{\sigma^2}{2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} v^2 \partial_v \partial_\mu \mathcal{U}(t,x,\mu)(v)d\mu(v)}_{\text{crochet}} = 0$$

- Si bruit systémique $\Rightarrow$ terme d'ordre deux par rapport à la mesure (propriétés de la diffusion sur $\mathcal{P}_2(^d)$???)

Part V. Convergence

Principe général

• Prouver la convergence des équilibres des jeux à N joueurs vers la solution du champ moyen $\rightsquigarrow$ généralisation de la propagation du chaos

∘ difficulté : fonctions de contrôle à l'équilibre à N joueurs $\rightsquigarrow$ $\alpha^{(N),\star}$ $\rightsquigarrow$ difficile d'avoir de la compacité

• Existe des contre-exemples avec rupture de régularité (Doncel, Gast, Gaujal : le contrôle prend ses valeurs dans ensemble discret)

• Situation régulière $\rightsquigarrow$ bénéficier de l'équation maîtresse limite

∘ première difficulté : montrer que l'équation maîtresse a une solution classique $\rightsquigarrow$ méthode de flot / caractéristiques (Lions ; Cardaliaguet, D., Lasry, Lions ; Chassagneux, Crisan, D.)

∘ deuxième difficulté : faire agir la solution de l'équation maîtresse sur l'équilibre à N joueurs $\rightsquigarrow$ convergence $L^2(\Omega \times [0, T])$ des contrôles sous hypothèses ad hoc (Cardaliaguet, D., Lasry, Lions).

Equation maîtresse pour EDS McKean-Vlasov

- Cas sans contrôle McKean Vlasov

$$dX_t = b(X_t, \mathcal{L}(X_t))dt + dW_t, \quad t \in [0, T]$$

  - régularité : b Lispchitz en $(x, \mu) \leadsto$ Wasserstein W_2

- Construction de la solution de l'équation maîtresse $\leadsto$ $\mathcal{L}(X_t)$ ne dépend que de $\mathcal{L}(X_0)$ et action sur fonctions tests

$$\mathcal{U}(t, \mu) = g(\mathcal{L}(X_{T-t})), \quad \mathcal{L}(X_0) = \mu, \quad g : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

- $\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t, \mathcal{L}(X_t)) = 0 \Rightarrow$ équation maîtresse

$$\partial_t \mathcal{U}(t, \mu) + \int_{\mathbb{R}} b(v, \mu) \partial_\mu \mathcal{U}(t, \mu)(v) d\mu(v)$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_v \partial_\mu \mathcal{U}(t, \mu)(v) d\mu(v) = 0$$

  - condition terminale $\mathcal{U}(T, \mu) = g(\mu)$

Propagation du chaos revisitée

- Système de particules

$$dX_t^{i,N} = b(X_t^{i,N}, \bar{\mu}_t^{N,i})dt + dW_t^i, \quad (X_0^{1,N}, \ldots, X_0^{N,N}) \sim \mu_0^{\otimes N}$$

  ∘ $\bar{\mu}_t^{N,i} = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{X_t^j}$

  ∘ démontrer la convergence vers la loi de la solution de McKean-Vlasov

Propagation du chaos revisitée

- Système de particules

$$dX_t^{i,N} = b(X_t^{i,N}, \bar{\mu}_t^{N,i})dt + dW_t^i, \quad (X_0^{1,N}, \ldots, X_0^{N,N}) \sim \mu_0^{\otimes N}$$

- Développer $(\mathcal{U}(t, \bar{\mu}_T^{N,i}))_{0 \le t \le T}$ $(t = T \rightsquigarrow$ test ϕ on $\bar{\mu}_T^N)$

$$\begin{aligned}
d[\mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,i})] = \Bigg(& \partial_t \mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,i}) + \underbrace{\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \partial_\mu \mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,i})(X_t^{N,j}) b(X_t^j, \bar{\mu}_t^{N,j})}_{\sim \int_{\mathbb{R}} \partial_\mu \mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,i})(v) b(v, \bar{\mu}_t^{N,i}) \bar{\mu}_t^{N,i}(dv)} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2(N-1)} \sum_{j \neq i} \partial_v \partial_\mu \mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,i})(X_t^{N,j})}_{= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_v \partial_\mu \mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,i})(v) \bar{\mu}_t^{N,i}(dv)} \\
& + \frac{1}{2(N-1)^2} \sum_{j \neq i} \partial_\mu^2 \mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,j})(X_t^{N,j}, X_t^{N,j}) \Bigg) dt + d\mathrm{martingale}_t
\end{aligned}$$

Propagation du chaos revisitée

- Système de particules

$$dX_t^{i,N} = b(X_t^{i,N}, \bar{\mu}_t^{N,i})dt + dW_t^i, \quad (X_0^{1,N}, \dots, X_0^{N,N}) \sim \mu_0^{\otimes N}$$

$$d[\mathcal{U}(t, \bar{\mu}_t^{N,i})] = O(\frac{1}{N})dt + d\text{martingale}_t, \quad \mathcal{U}(T, \bar{\mu}_T^{N,i}) = g(\bar{\mu}_T^{N,i})$$

- Approximation

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(\bar{\mu}_T^{N,i})] &= \mathbb{E}[\mathcal{U}(0, \bar{\mu}_0^N)] + O(\frac{1}{N}) \\ &\sim \mathcal{U}(0, \mu_0) + O(\frac{1}{N}) = g(\mathcal{L}(X_T)) + O(\frac{1}{N})\end{aligned}$$

- Difficulté $\rightsquigarrow$ régularité de $\mathcal{U}$ $\rightsquigarrow$ méthode de flot / caractéristiques

  ◦ différentiabilité de X par rapport condition initiale dans L^2 $\rightsquigarrow$ étude du processus tangent... (généralisation de méthodes type Kunita)

Part VI. Perspectives

Conclusion

- Présentation à partir d'un exemple $\rightsquigarrow$ généralisation à d'autres cas

$$dX_t = b(X_t, \mu_t, \alpha_t)dt + \sigma(X_t, \mu_t, \alpha_t)dW_t + (\sigma^0(X_t, \mu_t, \alpha_t)dW_t^0)$$

$$J(\alpha) = \mathbb{E} \int_0^T f(X_t, \mu_t, \alpha_t)dt + g(X_T, \mu_T)$$

- Cas joueur majeur / joueurs mineurs

$$dX_t^0 = b^0(X_t^0, \mu_t, \alpha_t^0)dt + \sigma^0 dW_t^0$$

$$dX_t = b(X_t, \mu_t, X_t^0, \alpha_t, \alpha_t^0)dt + \sigma dW_t$$

  - Equilibre entre joueur majeur et joueur représentatif

- Exercice optimal avec dépendance en la loi des temps d'exercice

- Bruit W^0 de dimension infinie $\rightsquigarrow$ régularisation