Moyennisation pour des processus linéaires par morceaux

Journées MAS
session modèles probabilistes et PDMP pour la biologie

Alexandre Genadot

Institut de Mathématique de Bordeaux, équipe Optim'AI
Inria Bordeaux-Sud Ouest, équipe CQFD

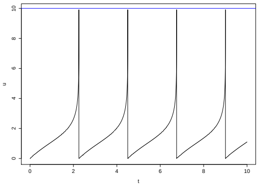
28 Août 2016

Soit un modèle (non probabiliste) très simple pour la biologie : un modèle intègre-et-tire exponentiel pour le potentiel trans-membranaire d'une neurone.

Les ingrédients :

- une EDO : $\tau \dot{x} = -(x - x_{\mathrm{repos}}) + \Delta_T e^{\frac{x-\theta}{\Delta_T}} + RI, \quad x(0) = \xi_0 > 0$ avec plusieurs paramètres $\tau, \Delta_T, \theta, R, I > 0$;
- un seuil : $c \gg \theta + \Delta_T$;
- une valeur de réinitialisation : $x_{\mathrm{repos}} < c$.

Par exemple avec $x_{\mathrm{repos}} = 0$, $\tau = \Delta_T = R = I = 1$ et $c = 10$ on a :



C'est un modèle très simple...

- néanmoins utilisé pour faire des expériences numériques avec des myriades de neurones connectés en réseau ;
- capable de « coller » aux données en ajoutant une période réfractaire Δ_r et en faisant dépendre les paramètres du temps passé depuis le dernier *spike*.

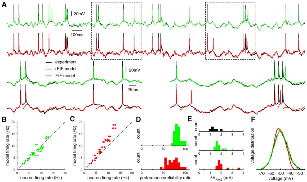


Figure – Dynamic I-V Curves Are Reliable Predictors of Naturalistic Pyramidal-Neuron Voltage Traces. Badel et al. 2008.

Maintenant, oublions les neurones...

On considère

- une EDO de la forme
$$\dot{x} = \frac{1}{\tau} F(x)$$
avec F positive, continue ;
- un seuil c ;
- une variable de réinitialisation ξ.

On PDMP-ise ?

- une EDO de la forme
$$\dot{X} = Y F(X)$$
avec F positive, continue et Y une chaîne de Markov à temps continu ;
- un seuil c ;
- une mesure de réinitialisation ν_Y sur (m, c) et dépendant de la valeur courante de Y.

La forme de l'EDO très simple ici permet de se ramener au cas linéaire en posant $Z = G(X)$ avec
$$G(x) = \int_m^x \frac{\mathrm{d}u}{F(u)},$$
pourvu que la transformation ait du sens...

On considère donc :

- une EDO de la forme
$$\dot{X} = Y$$
avec Y une chaîne de Markov à temps continu à valeurs dans $\mathcal{Y}$ dénombrable et de matrice d'intensité Q ;
- un seuil c ;
- une mesure de réinitialisation ν_Y dépendant de la valeur courante de Y.

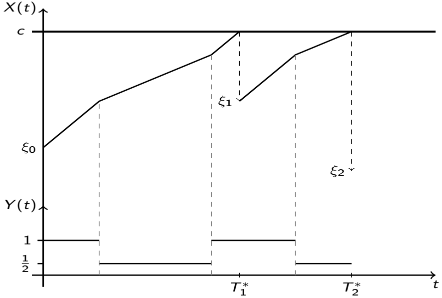


Figure – Une trajectoire de X avec Y oscillant entre $1/2$ et 1.

Accélération :

$$Y_\varepsilon(t) = Y(t/\varepsilon)$$

et on suppose Y récurrente positive avec mesure invariante π :

$$\pi Q = 0.$$

Que se passe-t-il pour X_ε lorsque ε tend vers 0 ?

Surtout : que se passe-t-il au bord ?

Approche par problème de martingale (« contraint » selon le vocabulaire de T. Kurtz) :

Pour toute fonction $f : (-\infty, c) \to \mathbf{R}$ telle que

C1) f est mesurable et absolument continue ;

C2) f est localement intégrable à la frontière : pour tout t,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{T^*_{\varepsilon,i} \leq t} |f(X_\varepsilon(T^*_{\varepsilon,i})) - f(X_\varepsilon(T^{*,-}_{\varepsilon,i}))|\right) < \infty,$$

le processus

$$f(X_\varepsilon(t)) - f(X_\varepsilon(0)) - \int_0^t f'(X_\varepsilon(s)) Y_\varepsilon(s) \mathrm{d}s - \int_0^t \int_{-\infty}^c [f(u) - f(X_\varepsilon(s^-))] \nu_{Y_\varepsilon(s-)}(\mathrm{d}u) p^*_\varepsilon(\mathrm{d}s)$$

est une martingale où p^*_ε est la mesure comptant le nombre de saut à la frontière.

La mesure p^*_ε est singulière : il y a des sauts instantanés à la frontière.

Voyons une façon de montrer que $\{X_\varepsilon, \varepsilon\}$ est tendu : la méthode de pénalisation.

On passe par un processus pénalisé $X^{P_k}_\varepsilon$ ne sautant pas instantanément à la frontière mais rapidement :

$$p^*_\varepsilon(\mathrm{d}s) \to \frac{1}{\varepsilon^k} 1_{[c,\infty)}(X^{P_k}_\varepsilon(s))\mathrm{d}s.$$

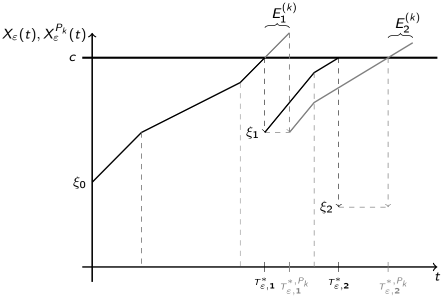


Figure – Les processus X_ε (en noir) et $X^{P_k}_\varepsilon$ (en gris) (avec couplage post-saut).

Le processus $X_\varepsilon^{P_k}$ saute toujours trop rapidement...

On change le temps afin de ralentir le processus à la frontière :

$$\lambda_\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1 + \frac{1}{\varepsilon^k} 1_{[c,\infty)}(X_\varepsilon^P(s))}, \quad \mu_\varepsilon(t) = t - \lambda_\varepsilon(t).$$

Cette fois, $X_\varepsilon^{P_k} \circ \lambda_\varepsilon$ est tendu...

Est-ce que ça veut dire que $X_\varepsilon^{P_k}$ est tendu ?

Oui, si la limite de λ_ε est (par exemple) strictement croissante.

Les processus X_ε et $X_\varepsilon^{P_k}$ sont proches (pour k suffisamment grand) :

$$\lim_{k\to\infty} W(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{P_k}) = \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{A\sim X_\varepsilon \\ B\sim X_\varepsilon^{P_k}}} \mathbf{E}(\mathrm{d}_S(A,B)) = 0.$$

où d_S est la distance de Skorokhod.

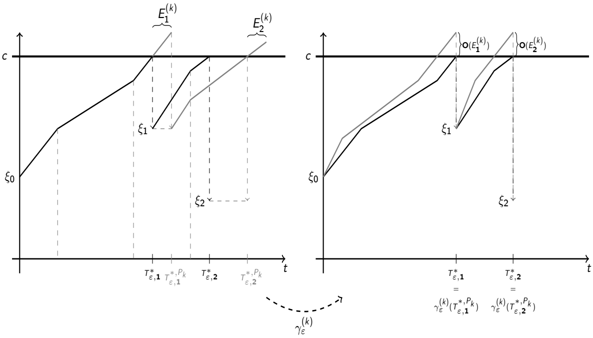


Figure – Gauche : trajectoires de X_ε (en noir) et $X_\varepsilon^{P_k}$ (en gris). Droite : trajectoires de X_ε (en noir) et $X_\varepsilon^{P_k} \circ \gamma_\varepsilon^{(k)}$ (en gris).

On en déduit que X_ε est tendu.

Identification de la limite.

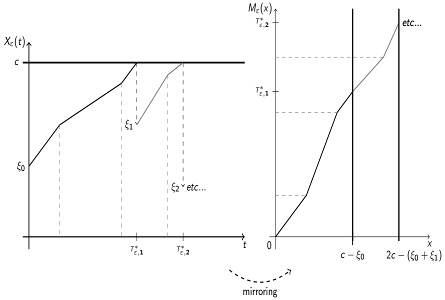


Figure – Gauche : une trajectoire de X_ε. Droite : une trojectoire d'un processus « miroir » M_ε.

$$« \ \mathbf{P}(Y_\varepsilon(T^{*,-}_{\varepsilon,1}) = y) = \mathbf{P}(W_\varepsilon(c-\xi_0) = 1/y) \ ».$$

En résumé :

Le processus X_ε converge en loi vers $\bar{X}$ tel que si $f : (-\infty, c) \to \mathbf{R}$ est mesurable et satisfait C1) et C2) le processus

$$f(\bar{X}(t)) - f(\xi_0) - \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\pi(\{y\}) \int_0^t f'(\bar{X}(s))\mathrm{d}s$$
$$- \int_0^t \int_{-\infty}^c [f(u) - f(\bar{X}(s^-))]\bar{\nu}(\mathrm{d}u)\bar{p}^*(\mathrm{d}s)$$

pour $t \in [0, T]$, est une martingale, avec $\bar{p}^*$ la mesure de comptage au bord pour $\bar{X}$.

La mesure de moyennisation au bord $\bar{\nu}$ est définie par

$$\bar{\nu}(\mathrm{d}u) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \nu_y(\mathrm{d}u)\pi^*(\{1/y\})$$

où π^* est la mesure invariante associée à la matrice d'intensité $V^{-1}Q$ avec $V = \mathrm{diag}\{y; y \in \mathcal{Y}\}$.

- Pour ce qui est de la tension, on peut couvrir des cas plus généraux sans beaucoup plus d'effort...
- Pour ce qui est de l'identification de la mesure de moyennisation au bord... ça peut être plus compliqué...