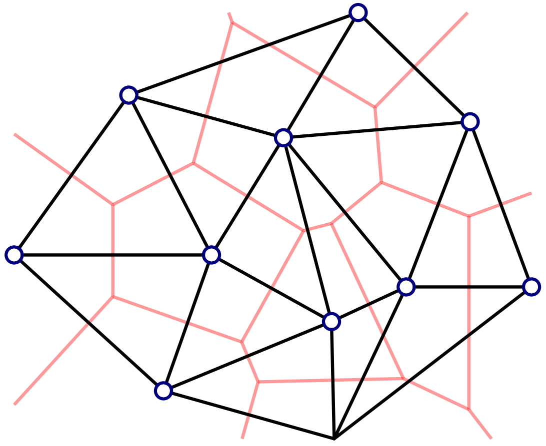
Complexité lissée d'enveloppe convexe

Xavier Goaoc (LIGM)

Travail mené avec Olivier Devillers, Marc Glisse et Rémy Thomasse (Inria)

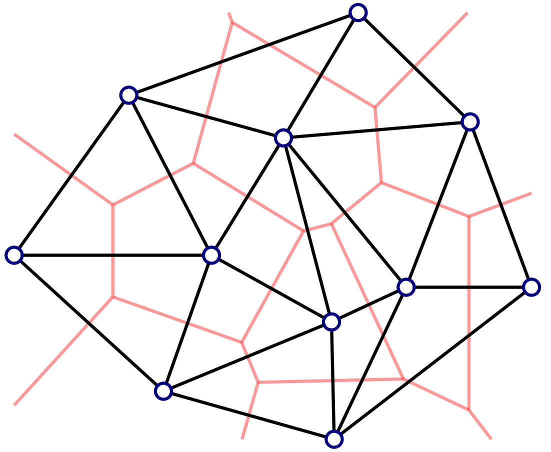
1. Questions
2. Réponses
3. Technique

Triangulation de Delaunay d'un ensemble P de points de $\mathbb{R}^d$.



Décomposition de $conv(P)$ en simplexes

$(d+1)$-uplets de points de sphère circonscrite vide



Triangulation de Delaunay d'un ensemble P de points de $\mathbb{R}^d$.

Décomposition de $conv(P)$ en simplexes

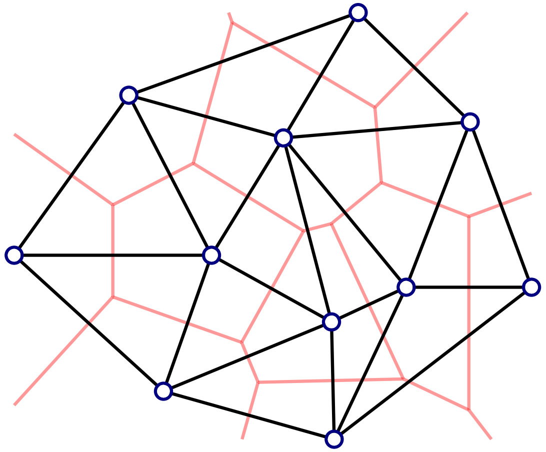
$(d+1)$-uplets de points de sphère circonscrite vide

Nombre d'arêtes d'une triangulation de Delaunay sur V sommets ?

Complexité d'algorithmes, espace mémoire

asymptotique $V \to \infty$

Triangulation de Delaunay d'un ensemble P de points de $\mathbb{R}^d$.



Décomposition de $conv(P)$ en simplexes

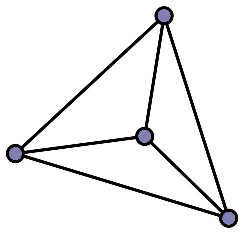
$(d+1)$-uplets de points de sphère circonscrite vide

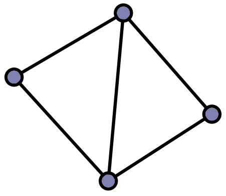
Nombre d'arêtes d'une triangulation de Delaunay sur V sommets ?

Complexité d'algorithmes, espace mémoire

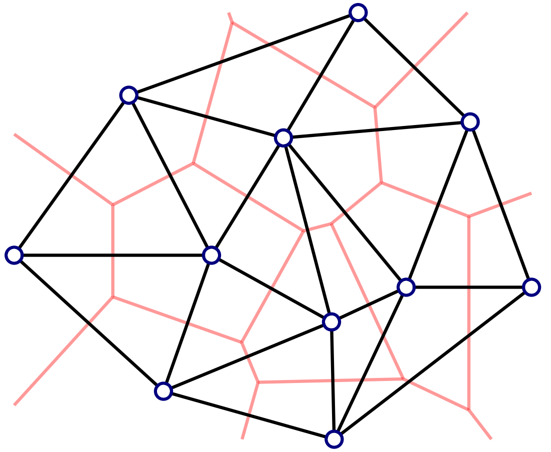
asymptotique $V \to \infty$

Dépends de la position des points.





Triangulation de Delaunay d'un ensemble P de points de $\mathbb{R}^d$.



Décomposition de $conv(P)$ en simplexes

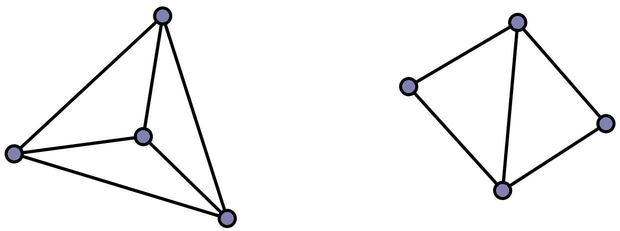
$(d+1)$-uplets de points de sphère circonscrite vide

Nombre d'arêtes d'une triangulation de Delaunay sur V sommets ?

Complexité d'algorithmes, espace mémoire

asymptotique $V \to \infty$

Dépends de la position des points.



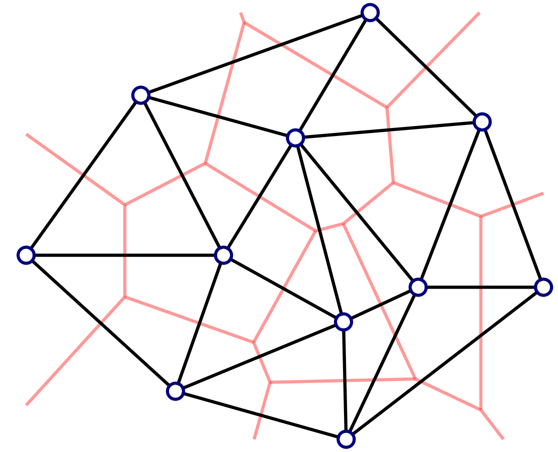
$d = 2$: Linéaire

$$2V - 3 \leq E \leq 3V - 6$$

Formule d'Euler $V - E + F = 2$

Double comptage $3(F-1) + e(CH) = 2E$

Triangulation de Delaunay d'un ensemble P de points de $\mathbb{R}^d$.



Décomposition de $conv(P)$ en simplexes

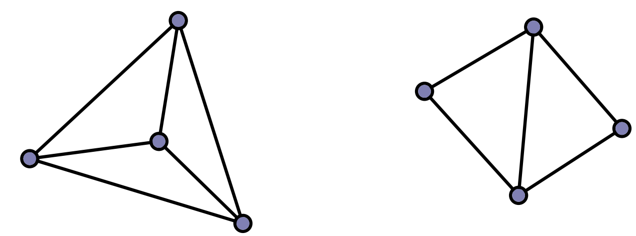
$(d+1)$-uplets de points de sphère circonscrite vide

Nombre d'arêtes d'une triangulation de Delaunay sur V sommets ?

Complexité d'algorithmes, espace mémoire

asymptotique $V \to \infty$

Dépends de la position des points.

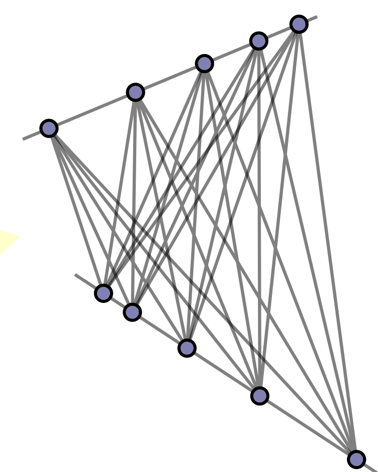


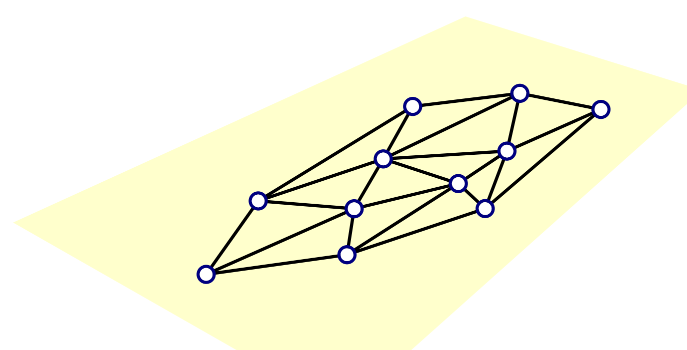
$d = 2$: Linéaire

$$2V - 3 \leq E \leq 3V - 6$$

Formule d'Euler $V - E + F = 2$

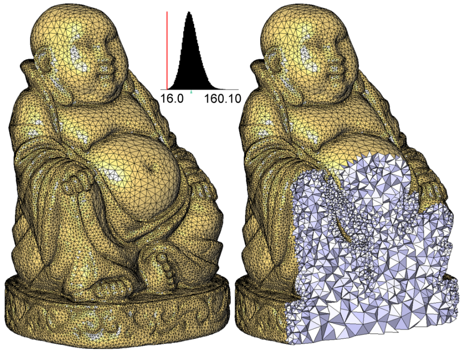
Double comptage $3(F-1) + e(CH) = 2E$



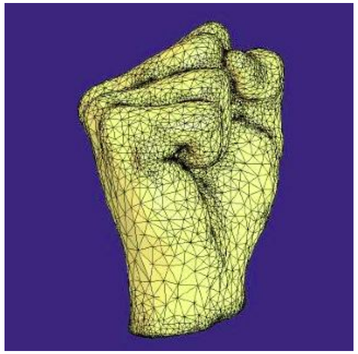


$d = 3$: Entre linéaire et quadratique

L'écart entre linéaire et quadratique est décisif pour de nombreuses applications.



(Image : INRIA Geometrica)



(Image : Nina Amenta)

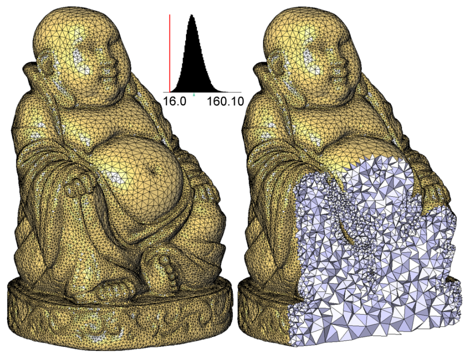
infographie

geometric processing

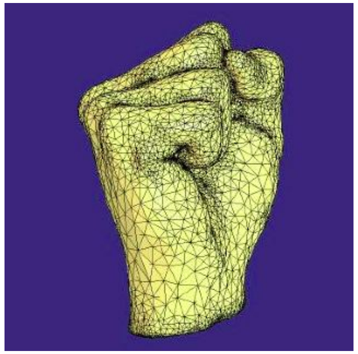
CAO

$V \simeq 10^5$ courant.

L'écart entre linéaire et quadratique est décisif pour de nombreuses applications.



(Image : INRIA Geometrica)



(Image : Nina Amenta)

infographie

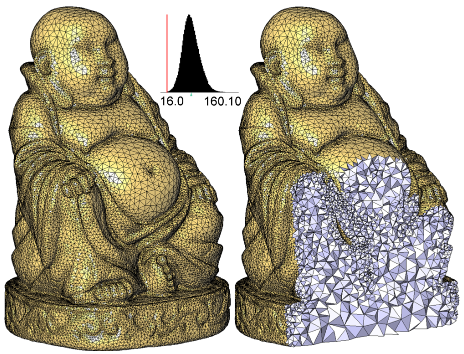
geometric processing

CAO

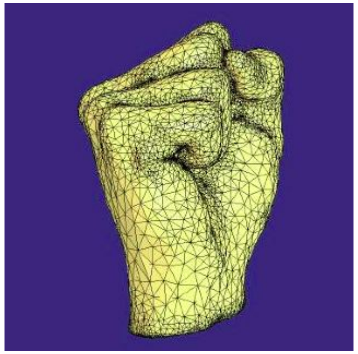
$V \simeq 10^5$ courant.

Constat empirique : E est généralement quasi-linéaire en V pour $d = 3$.

L'écart entre linéaire et quadratique est décisif pour de nombreuses applications.



(Image : INRIA Geometrica)



(Image : Nina Amenta)

infographie

geometric processing

CAO

$V \simeq 10^5$ courant.

Constat empirique : E est généralement quasi-linéaire en V pour $d = 3$.

Tentatives d'explication... peu concluantes.

$\star$ prise en compte de la densité via $\frac{\text{distance minimale}}{\text{diametre}}$ [Erickson'03][Erickson'05] ou des densités min/max [Attali-Boissonnat'04][Amenta-Attali-Devillers'12]

Pas quasilinéaire, sur-échantillonné.

$\star$ bornes sur l'espérance pour des distributions dans un volume [Dwyer'93], sur un polyhèdre [Golin-Na'03]... ou sur une surface lisse [Attali-Boissonnat-Lieutier'03] [Devillers-Erickson-G'08]...

pas de modèle statistique

Complexité lissée : formulation probabiliste pertinente sans modèle statistique.

$$\mathcal{D}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \mathsf{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#DT\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

η_i variable aléatoire de loi μ.

$\#DT(P)$: nombre d'arêtes de la triangulation de Delaunay de P

Complexité lissée : formulation probabiliste pertinente sans modèle statistique.

$$\mathcal{D}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \mathrm{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#DT\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

η_i variable aléatoire de loi μ.

$\#DT(P)$: nombre d'arêtes de la triangulation de Delaunay de P

Exprime le cas le pire après petite perturbation.

Quantifie la résilience des pire cas à perturbation.

Petites perturbations plausible dans cadre applicatif : coordonnées tronquées, erreurs de mesures...

Amplitude de la perturbation indépendante ou fonction de n.

Complexité lissée : formulation probabiliste pertinente sans modèle statistique.

$$\mathcal{D}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \mathrm{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#DT\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

η_i variable aléatoire de loi μ.

$\#DT(P)$: nombre d'arêtes de la triangulation de Delaunay de P

Exprime le cas le pire après petite perturbation.

Quantifie la résilience des pire cas à perturbation.

Petites perturbations plausible dans cadre applicatif : coordonnées tronquées, erreurs de mesures...

Amplitude de la perturbation indépendante ou fonction de n.

Introduite pour expliquer l'efficacité de l'algorithme du simplexe [Spielman-Tang'04]

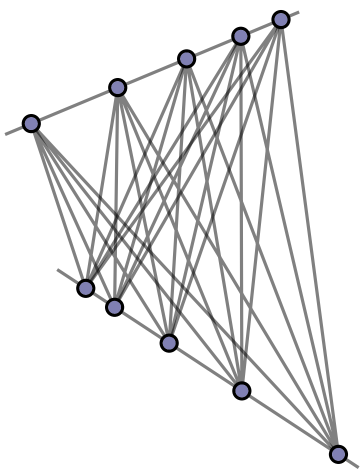
$$\mathcal{D}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \mathsf{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#DT\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

Aucun résultat non trivial sur la complexité lissée de la triangulation de Delaunay.

$$\mathcal{D}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \text{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#DT\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

Aucun résultat non trivial sur la complexité lissée de la triangulation de Delaunay.

Exemples de questions pertinentes.



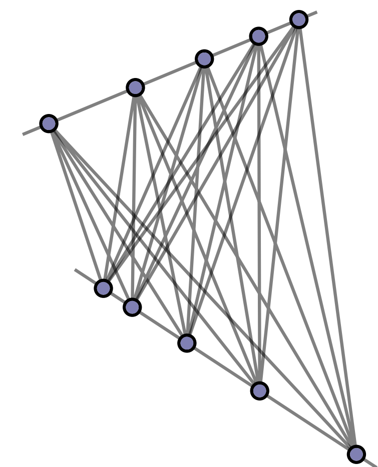
- $\star$ $\mu = \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_d)$ ou $\mu = \mathbf{1}_{\mathbb{B}_d(O,\delta)}$.
- $\star$ Cas où $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*$ ont une DT quadratique (ie. sans faire le $\max$).

(Ne pas hésiter à signaler les réponses à `goaoc@u-pem.fr`)

$$\mathcal{D}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \text{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#DT\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

Aucun résultat non trivial sur la complexité lissée de la triangulation de Delaunay.

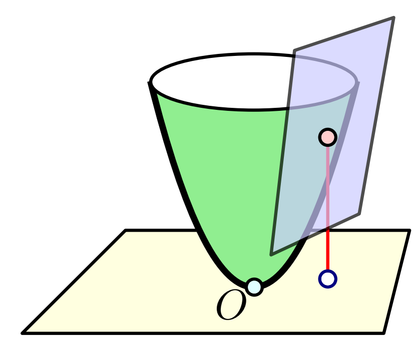
Exemples de questions pertinentes.



- ⋆ $\mu = \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_d)$ ou $\mu = \mathbf{1}_{\mathbb{B}_d(O,\delta)}$.
- ⋆ Cas où $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*$ ont une DT quadratique (ie. sans faire le $\max$).

(Ne pas hésiter à signaler les réponses à goaoc@u-pem.fr)

On a des résultats sur la complexité lissée de l'enveloppe convexe.



1. Questions
2. Réponses
3. Technique

Complexité lissée des enveloppes convexes.

$$\mathcal{S}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \text{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#CH\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

η_i variable aléatoire de loi μ.

$\#CH(P)$: nombre de faces (toutes dimensions) de l'enveloppe convexe de P

Deux modèles de perturbation : Gaussien $\mu = \mathcal{N}(O, \sigma^2 I_d)$ et Euclidien $\mu = \mathbf{1}_{\mathbb{B}_d(O,\delta)}$.

Complexité lissée des enveloppes convexes.

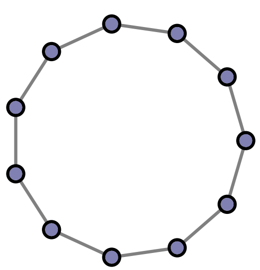
$$\mathcal{S}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \mathrm{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#CH\left(p_1^* + \eta_1, p_2^* + \eta_2, \ldots, p_n^* + \eta_n\right)\right]$$

η_i variable aléatoire de loi μ.

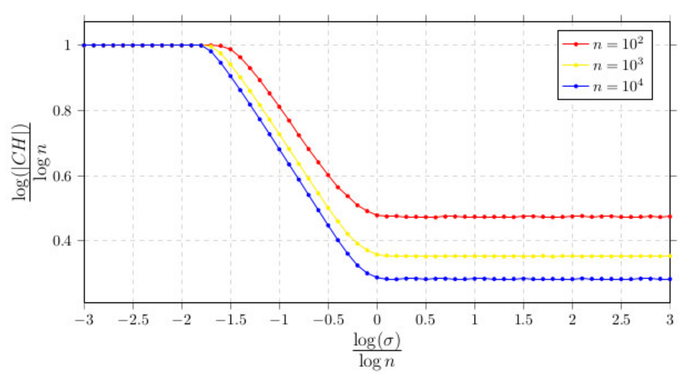
$\#CH(P)$: nombre de faces (toutes dimensions) de l'enveloppe convexe de P

Deux modèles de perturbation : Gaussien $\mu = \mathcal{N}(O, \sigma^2 I_d)$ et Euclidien $\mu = \mathbf{1}_{\mathbb{B}_d(O,\delta)}$.

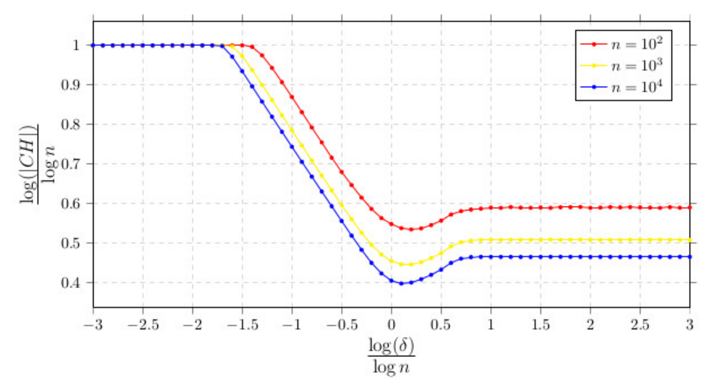
Simulations



Sommets d'un n-gone régulier



Gaussien



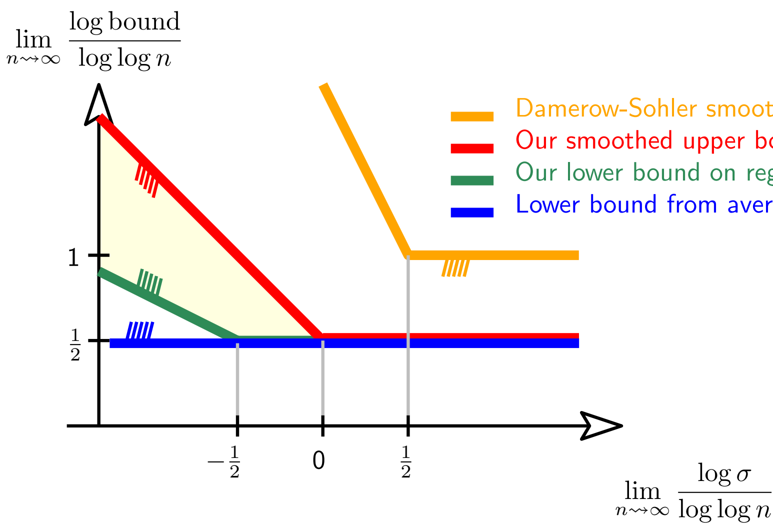
Euclidien

$$\mathcal{S}(n,\mu) = \max_{\substack{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^* \in \mathbb{R}^d \\ \mathrm{diam}(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \leq 1}} \mathbb{E}\left[\#CH\left(p_1^*+\eta_1, p_2^*+\eta_2, \ldots, p_n^*+\eta_n\right)\right]$$

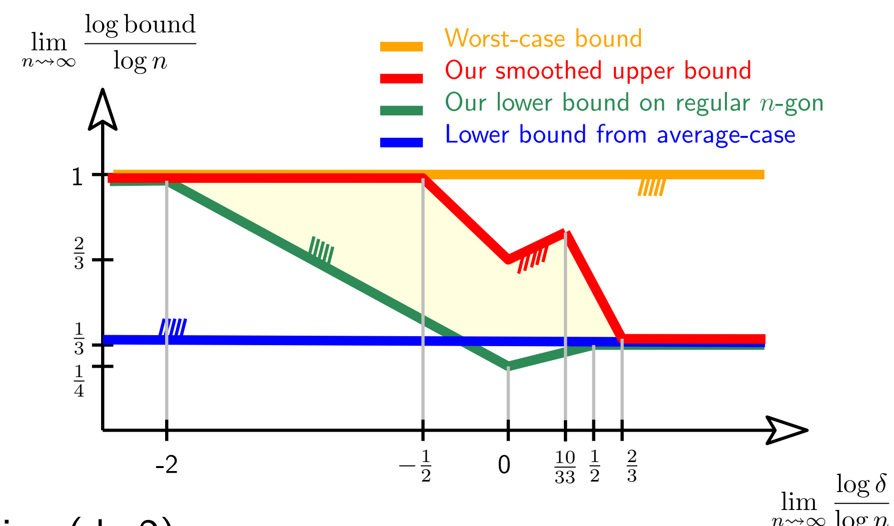
η_i variable aléatoire de loi μ.

$\#CH(P)$: nombre de faces (toutes dimensions) de l'enveloppe convexe de P

Résultats :

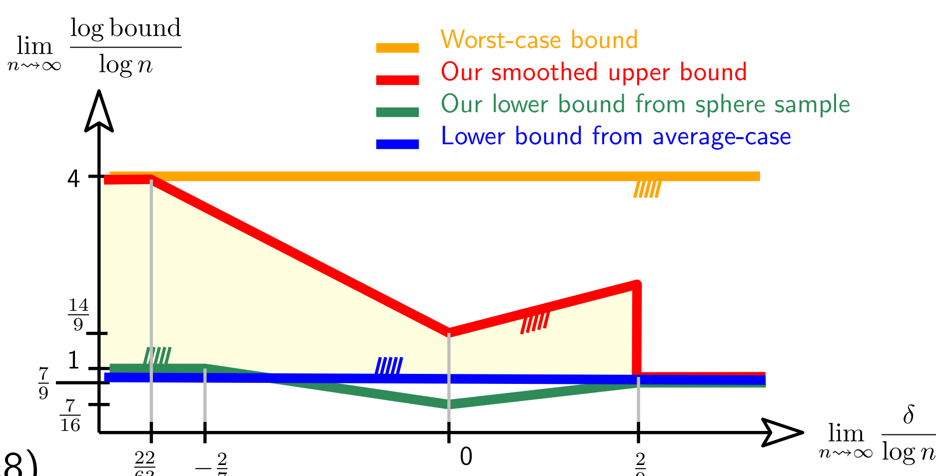


Gaussien (d=2)



Euclidien (d=2)

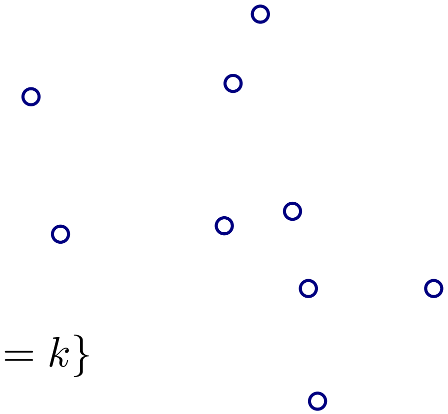
$$\mathcal{S}\left(n, \mathcal{N}(O, \sigma^2 I_2)\right) = O\left(\frac{\sqrt{\log n}}{\sigma} + \sqrt{\log n}\right)$$



Euclidien (d=8)

1. Questions
2. Réponses
3. Technique

Point de vue ”hypergraphe géométrique”

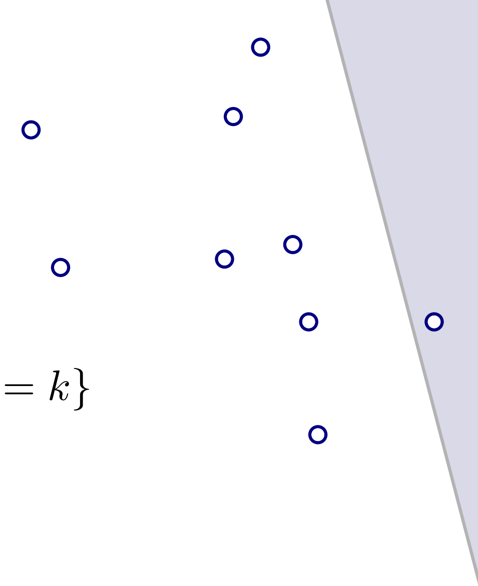


Pour tout sous-ensemble fini $P \subset \mathbb{R}^d$

$\mathcal{H}(P) = \{P \cap h : h$ un demi-espace (fermé) de $\mathbb{R}^d\}$ et $\mathcal{H}^{(k)}(P) = \{X \in \mathcal{H}(P) : |X| = k\}$

- q sommet de $CH(P) \Leftrightarrow q \in \mathcal{H}^{(1)}(P)$
- $\{q, r\}$ arête de $CH(P) \Rightarrow \{q, r\} \in \mathcal{H}^{(2)}(P)$.
- faces de $CH(P)$ de dimension $k \subseteq \mathcal{H}^{(k+1)}(P)$

Point de vue "hypergraphe géométrique"



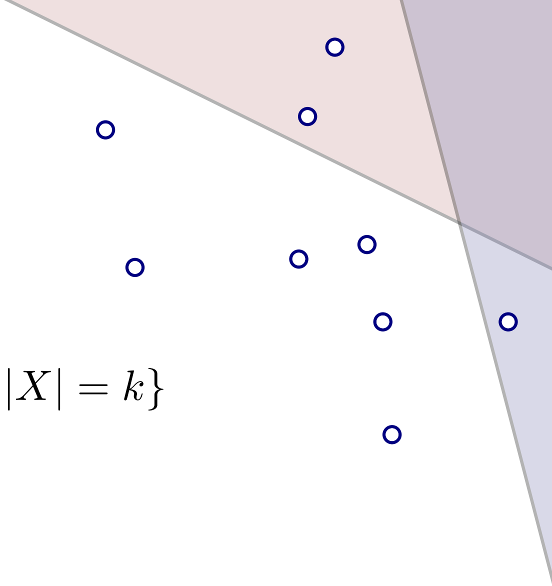
Pour tout sous-ensemble fini $P \subset \mathbb{R}^d$

$\mathcal{H}(P) = \{P \cap h : h$ un demi-espace (fermé) de $\mathbb{R}^d\}$ et $\mathcal{H}^{(k)}(P) = \{X \in \mathcal{H}(P) : |X| = k\}$

q sommet de $CH(P) \Leftrightarrow q \in \mathcal{H}^{(1)}(P)$

$\{q, r\}$ arête de $CH(P) \Rightarrow \{q, r\} \in \mathcal{H}^{(2)}(P)$.

faces de $CH(P)$ de dimension $k \subseteq \mathcal{H}^{(k+1)}(P)$



Point de vue "hypergraphe géométrique"

Pour tout sous-ensemble fini $P \subset \mathbb{R}^d$

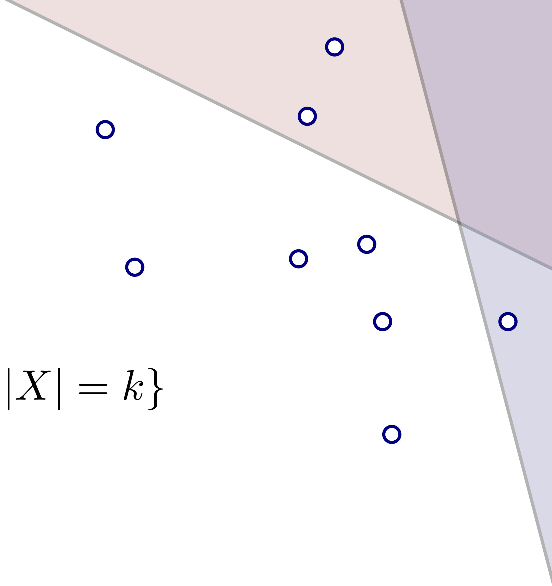
$\mathcal{H}(P) = \{P \cap h : h$ un demi-espace (fermé) de $\mathbb{R}^d\}$ et $\mathcal{H}^{(k)}(P) = \{X \in \mathcal{H}(P) : |X| = k\}$

q sommet de $CH(P) \Leftrightarrow q \in \mathcal{H}^{(1)}(P)$

$\{q, r\}$ arête de $CH(P) \Rightarrow \{q, r\} \in \mathcal{H}^{(2)}(P)$.

faces de $CH(P)$ de dimension $k \subseteq \mathcal{H}^{(k+1)}(P)$

Point de vue "hypergraphe géométrique"



Pour tout sous-ensemble fini $P \subset \mathbb{R}^d$

$\mathcal{H}(P) = \{P \cap h : h$ un demi-espace (fermé) de $\mathbb{R}^d\}$ et $\mathcal{H}^{(k)}(P) = \{X \in \mathcal{H}(P) : |X| = k\}$

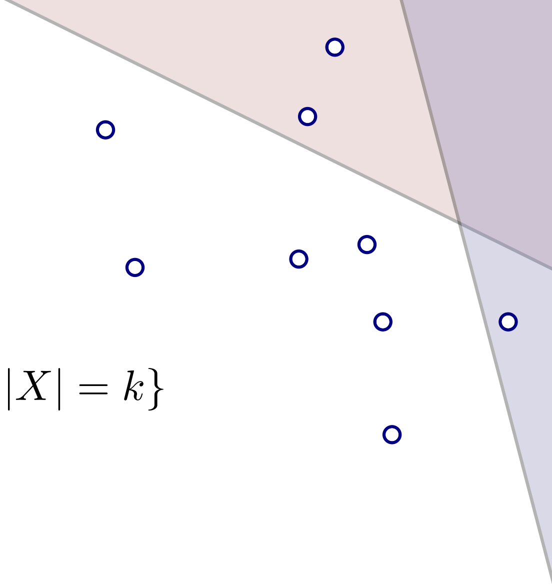
q sommet de $CH(P) \Leftrightarrow q \in \mathcal{H}^{(1)}(P)$

$\{q, r\}$ arête de $CH(P) \Rightarrow \{q, r\} \in \mathcal{H}^{(2)}(P)$.

faces de $CH(P)$ de dimension $k \subseteq \mathcal{H}^{(k+1)}(P)$

Pour un ensemble aléatoire fini de points $P \subset \mathbb{R}^d$ $\quad \mathbb{E}[\#CH(P)] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{k=d+1} |\mathcal{H}^{(k)}(P)|\right]$

Objectif : estimer $\mathbb{E}[|\mathcal{H}^{(k)}(P)|]$ pour k fixé.



Point de vue "hypergraphe géométrique"

Pour tout sous-ensemble fini $P \subset \mathbb{R}^d$

$\mathcal{H}(P) = \{P \cap h : h$ un demi-espace (fermé) de $\mathbb{R}^d\}$ et $\mathcal{H}^{(k)}(P) = \{X \in \mathcal{H}(P) : |X| = k\}$

q sommet de $CH(P) \Leftrightarrow q \in \mathcal{H}^{(1)}(P)$

$\{q, r\}$ arête de $CH(P) \Rightarrow \{q, r\} \in \mathcal{H}^{(2)}(P)$.

faces de $CH(P)$ de dimension $k \subseteq \mathcal{H}^{(k+1)}(P)$

Pour un ensemble aléatoire fini de points $P \subset \mathbb{R}^d$ $\qquad \mathbb{E}[\#CH(P)] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{k=d+1} |\mathcal{H}^{(k)}(P)|\right]$

Objectif : estimer $\mathbb{E}[|\mathcal{H}^{(k)}(P)|]$ pour k fixé.

On construit des triplet (W, C, R) adapté à P

- $\star$ R un ensemble de demi-espaces.
- $\star$ $W \subseteq C$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$
- $\star$ Pour tout $h \in R$, $h \cap P$ contient $W \cap P$ ou est contenu dans $C \cap P$.

On estime le nombre d'éléments de $\mathcal{H}^{(k)}(P)$ "produits" par R
en conditionnant sur l'événement $|W \cap P| \geq k$.

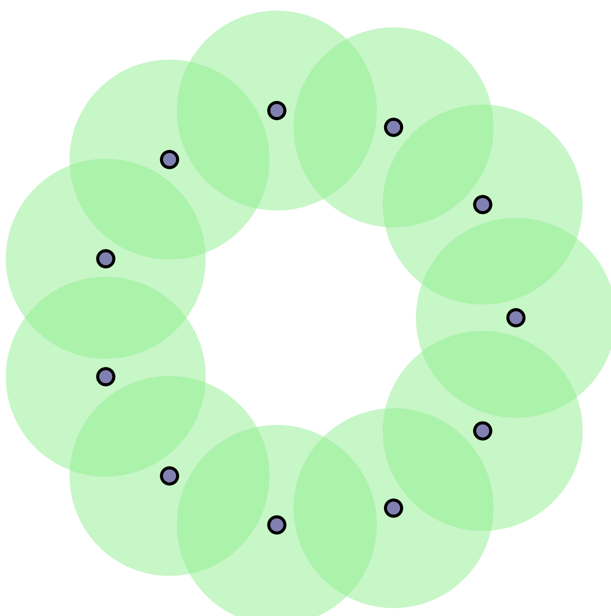
⋆ R un ensemble de demi-espaces.

⋆ $W \subseteq C$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$

⋆ Pour tout $h \in R$, $h \cap P$ contient $W \cap P$ ou est contenu dans $C \cap P$.

On estime le nombre d'éléments de $\mathcal{H}^{(k)}(P)$ "produits" par R en conditionnant sur l'événement $|W \cap P| \geq k$.

Exemple : perturbation euclidienne des sommets du n-gone



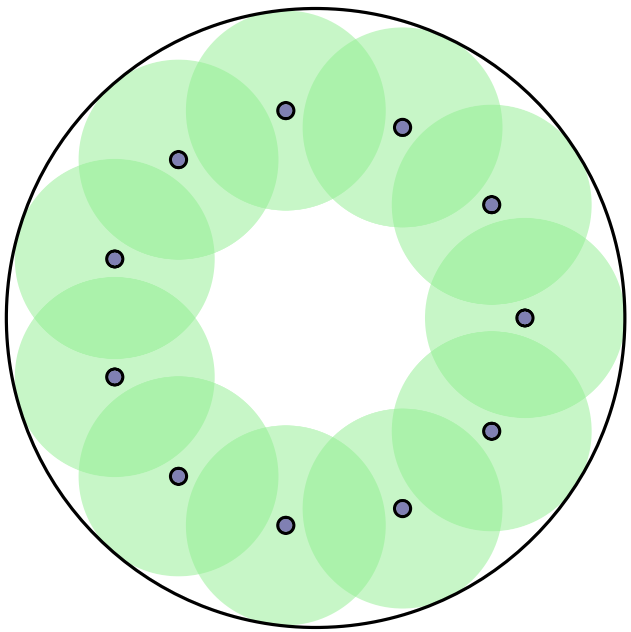
⋆ R un ensemble de demi-espaces.

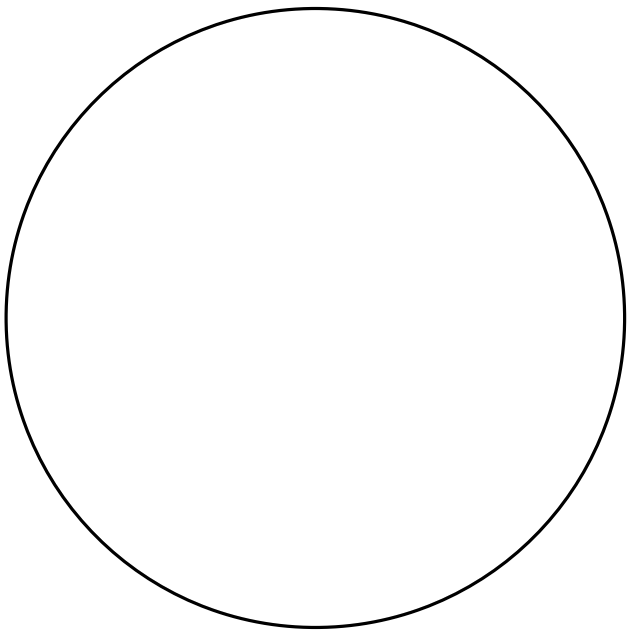
⋆ $W \subseteq C$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$

⋆ Pour tout $h \in R$, $h \cap P$ contient $W \cap P$ ou est contenu dans $C \cap P$.

On estime le nombre d'éléments de $\mathcal{H}^{(k)}(P)$ "produits" par R en conditionnant sur l'événement $|W \cap P| \geq k$.

Exemple : perturbation euclidienne des sommets du n-gone





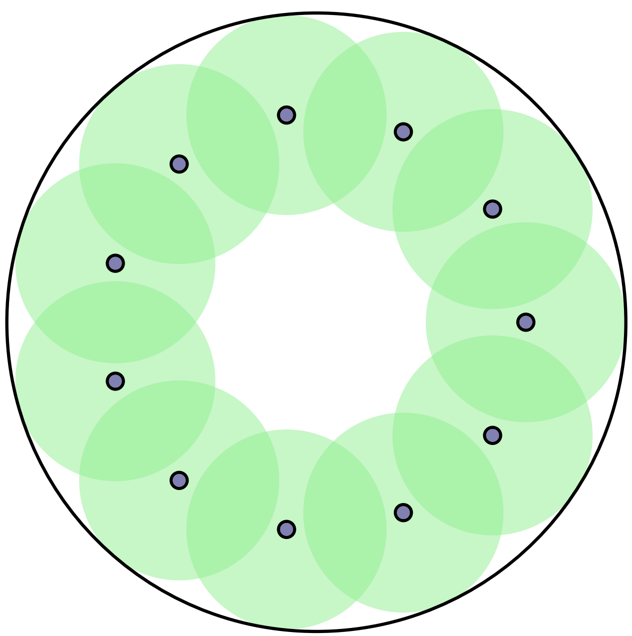
⋆ R un ensemble de demi-espaces.

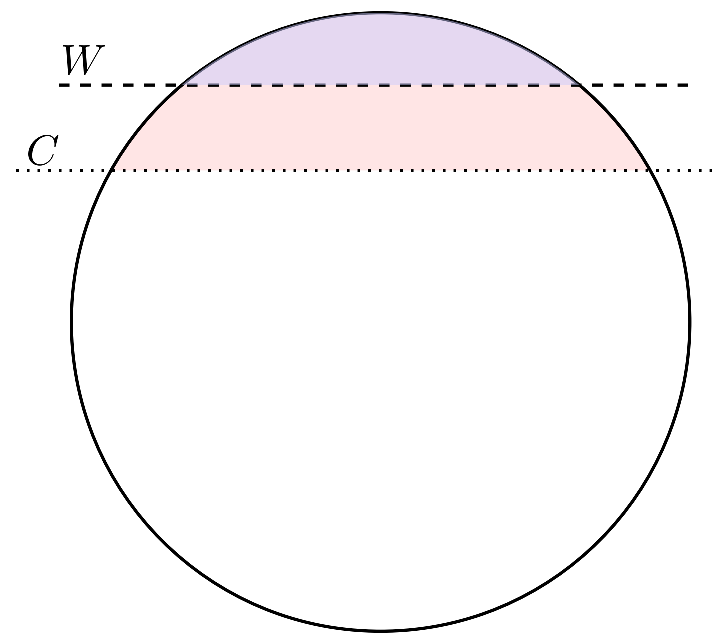
⋆ $W \subseteq C$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$

⋆ Pour tout $h \in R$, $h \cap P$ contient $W \cap P$ ou est contenu dans $C \cap P$.

On estime le nombre d'éléments de $\mathcal{H}^{(k)}(P)$ "produits" par R en conditionnant sur l'événement $|W \cap P| \geq k$.

Exemple : perturbation euclidienne des sommets du n-gone





Ajuster les profondeurs de W et C afin que $\mathbb{E}[W \cap P] = k \log n$ et $\mathbb{E}[C \cap P] = O(\log n)$

Borne de Chernoff $\Rightarrow$ W contient k points avec forte probabilité

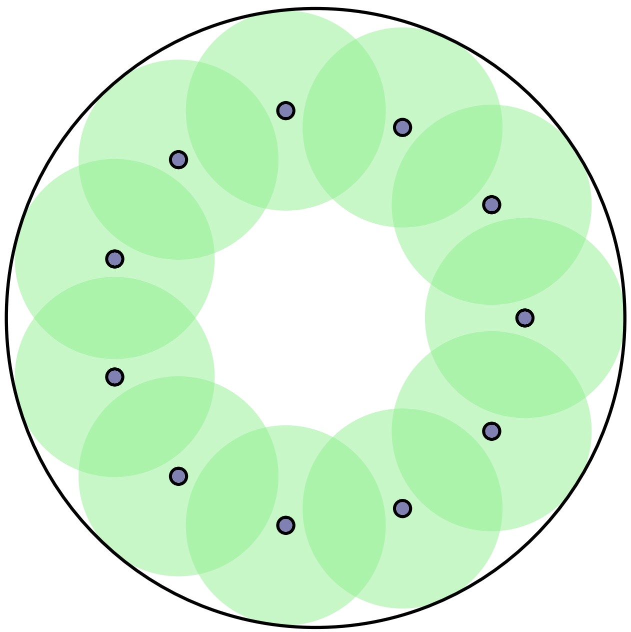
⋆ R un ensemble de demi-espaces.

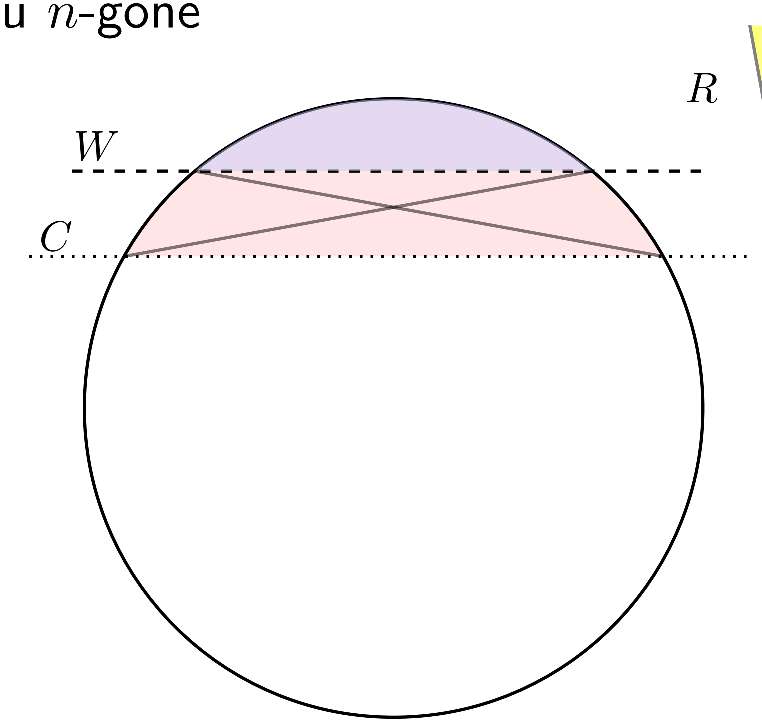
⋆ $W \subseteq C$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$

⋆ Pour tout $h \in R$, $h \cap P$ contient $W \cap P$ ou est contenu dans $C \cap P$.

On estime le nombre d'éléments de $\mathcal{H}^{(k)}(P)$ "produits" par R en conditionnant sur l'événement $|W \cap P| \geq k$.

Exemple : perturbation euclidienne des sommets du n-gone





Ajuster les profondeurs de W et C afin que $\mathbb{E}[W \cap P] = k \log n$ et $\mathbb{E}[C \cap P] = O(\log n)$

Borne de Chernoff $\Rightarrow$ W contient k points avec forte probabilité

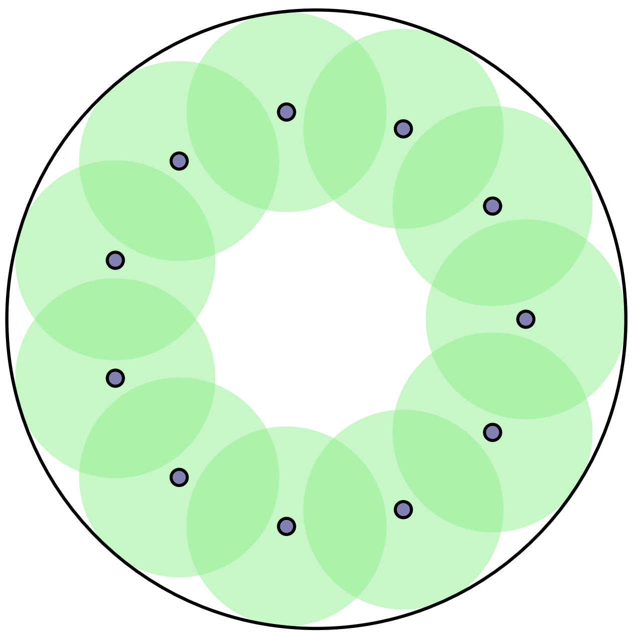
⋆ R un ensemble de demi-espaces.

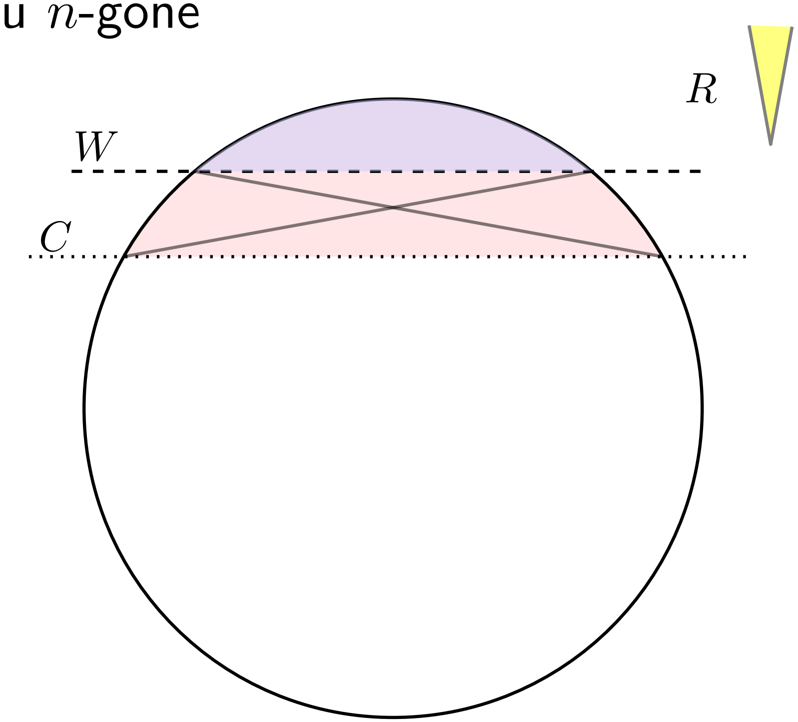
⋆ $W \subseteq C$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$

⋆ Pour tout $h \in R$, $h \cap P$ contient $W \cap P$ ou est contenu dans $C \cap P$.

On estime le nombre d'éléments de $\mathcal{H}^{(k)}(P)$ "produits" par R en conditionnant sur l'événement $|W \cap P| \geq k$.

Exemple : perturbation euclidienne des sommets du n-gone



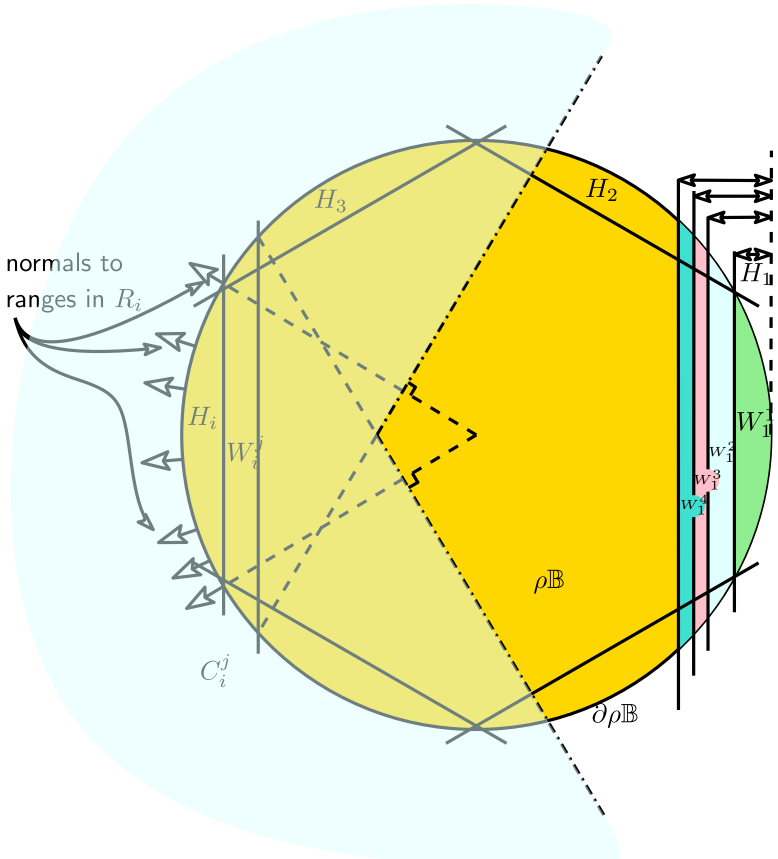


Ajuster les profondeurs de W et C afin que $\mathbb{E}[W \cap P] = k \log n$ et $\mathbb{E}[C \cap P] = O(\log n)$

Borne de Chernoff $\Rightarrow$ W contient k points avec forte probabilité

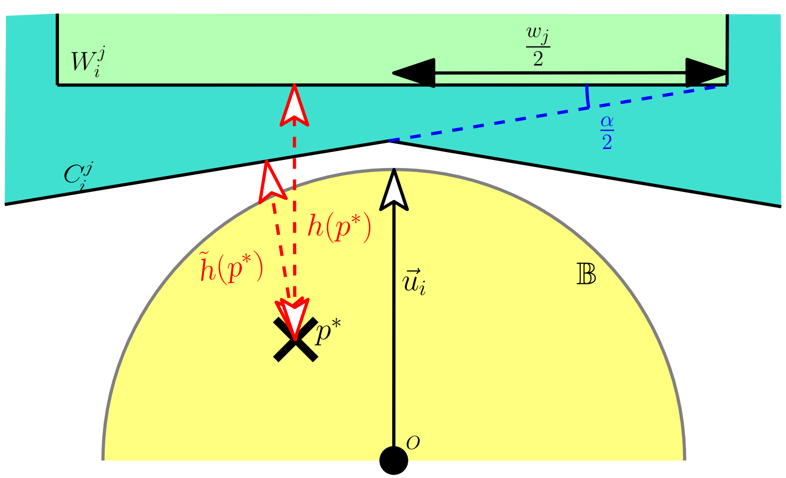
Nombre d'éléments de $\mathcal{H}^{(k)}(P)$ produits par R est $O(\log^k n)$.

Variante des *economic cap covers* [Bárány-Larman'88] reliant polytope aléatoires et corps flottants. Avantage : "locale en R".



En réalité...

- ⋆ "surcharge" des W (pour Chernoff) $\Rightarrow \log n$ en excès.
- ⋆ se corrige par une hiérarchie de triplets (W^j, C^j, R).
- ⋆ bornes de complexité lissées via argument de chargement.



Merci de votre attention.