Distribution limite des valeurs propres des matrices aléatoires et la fonction zeta d'Ihara des graphes

Oleksiy Khorunzhiy
LMV, Université de Versailles - Saint-Quentin

Journées MAS-2016, Grenoble

Fonction zeta d'Ihara d'un graphe Γ fini (connexe), $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,

$$Z_\Gamma(u) = \prod_{[C]} \frac{1}{1 - u^{\nu(C)}},$$

où $C = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = \alpha_1)$, $\alpha_i \in \mathcal{V}$ sont les cycles primitives sans "aller-retour" (non-backtracking cycles), $\nu(C) = m - 1$ est la longueur du C. Soit n le nombre de sommets dans $\Gamma = \Gamma_n$, $n = |\mathcal{V}|$.

La fonction zeta d'Ihara d'un graphe fini connexe

Fonction zeta d'Ihara d'un graphe Γ fini (connexe), $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,

$$Z_\Gamma(u) = \prod_{[C]} \frac{1}{1 - u^{\nu(C)}},$$

où $C = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = \alpha_1)$, $\alpha_i \in \mathcal{V}$ sont les cycles primitives sans "aller-retour" (non-backtracking cycles), $\nu(C) = m - 1$ est la longueur du C. Soit n le nombre de sommets dans $\Gamma = \Gamma_n$, $n = |\mathcal{V}|$.

Formule de Y. Ihara [1966] (aussi H. Bass [1992])

$$Z_\Gamma(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I + u^2(B - I) - uA),$$

La fonction zeta d'Ihara d'un graphe fini connexe

Fonction zeta d'Ihara d'un graphe Γ fini (connexe), $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,

$$Z_\Gamma(u) = \prod_{[C]} \frac{1}{1 - u^{\nu(C)}},$$

où $C = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = \alpha_1)$, $\alpha_i \in \mathcal{V}$ sont les cycles primitives sans "aller-retour" (non-backtracking cycles), $\nu(C) = m - 1$ est la longueur du C. Soit n le nombre de sommets dans $\Gamma = \Gamma_n$, $n = |\mathcal{V}|$.

Formule de Y. Ihara [1966] (aussi H. Bass [1992])

$$Z_\Gamma(u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(I + u^2(B - I) - uA),$$

où $A = (a_{ij})_{1 \le i < j \le n}$ est la matrice d'adjacence de Γ_n, B est une matrice diagonale, $B_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \deg(\beta_i)$, $\mathcal{V} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$,

$$r - 1 = |E| - n = \sum_{1 \le i < k \le n} a_{ik} - n,$$

et $|u| \le U_0(\Gamma)$, pour u réel ou complèxe.

L'ensemble des matrices aléatoires

Une famille des graphes aléatoires $\{\Gamma_n\}$ peut être déterminée par des matrices d'adjacence $A^{(n)}$. Pour l'ensemble des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi $\{\Gamma_n^{(\rho)}\}$ de n sommets on a des v. a. indépendantes $\{a_{ij}, i \le j\}$ de Bernoulli

$$\left(A^{(n,\rho)}\right)_{ij} = a_{ij}^{(n,\rho)} = \begin{cases} 1 - \delta_{ij}, & \text{avec probabilité } \rho/n, \\ 0, & \text{avec probabilité } 1 - \rho/n, \quad 0 < \rho < n. \end{cases}$$

L'ensemble des matrices aléatoires

Une famille des graphes aléatoires $\{\Gamma_n\}$ peut être déterminée par des matrices d'adjacence $A^{(n)}$. Pour l'ensemble des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi $\{\Gamma_n^{(\rho)}\}$ de n sommets on a des v. a. indépendantes $\{a_{ij}, i \le j\}$ de Bernoulli

$$\left(A^{(n,\rho)}\right)_{ij} = a_{ij}^{(n,\rho)} = 1 - \delta_{ij}, \text{ avec probabilité } \rho/n,$$
$$0, \text{ avec probabilité } 1 - \rho/n, \quad 0 < \rho < n.$$

Dans ce cas le choix naturel est $u^2 = v^2/\rho$ et on peut ecrire que

$$\det(I + u^2(B - I) - uA) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i((1 - v^2/\rho)I + H),$$

Une famille des graphes aléatoires $\{\Gamma_n\}$ peut être déterminée par des matrices d'adjacence $A^{(n)}$. Pour l'ensemble des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi $\{\Gamma_n^{(\rho)}\}$ de n sommets on a des v. a. indépendantes $\{a_{ij}, i \leq j\}$ de Bernoulli

$$\left(A^{(n,\rho)}\right)_{ij} = a_{ij}^{(n,\rho)} = \begin{cases} 1 - \delta_{ij}, & \text{avec probabilité } \rho/n, \\ 0, & \text{avec probabilité } 1 - \rho/n, \quad 0 < \rho < n. \end{cases}$$

Dans ce cas le choix naturel est $u^2 = v^2/\rho$ et on peut ecrire que

$$\det(I + u^2(B - I) - uA) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i((1 - v^2/\rho)I + H),$$

où $H = H^{(n,\rho)}(v)$ sont des matrices $n \times n$ réelles symétriques

$$H^{(n,\rho)}(v) = \frac{v^2}{\rho} B^{(n,\rho)} - \frac{v}{\sqrt{\rho}} A^{(n,\rho)}, \tag{1}$$

$B^{(n,\rho)} = diag(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(n,\rho)})$. On suppose que $v \in \mathbf{R}$.

Résultat principal

Théorème 1. (K., arXiv-2015) La fonction normalisée de comptage des valeurs propres $\lambda_j^{(n,\rho)}$ de $H^{(n,\rho)}(v) = \frac{v^2}{\rho} B - \frac{v}{\sqrt{\rho}} A$ converge,

$$\sigma_n^{(\rho)}(\lambda) = \frac{1}{n} \#\{j : \lambda_j^{(n,\rho)} \le \lambda\} \to \tilde{\sigma}_v(\lambda), \quad n, \rho \to \infty$$

Résultat principal

Théorème 1. (K., arXiv-2015) La fonction normalisée de comptage des valeurs propres $\lambda_j^{(n,\rho)}$ de $H^{(n,\rho)}(v) = \frac{v^2}{\rho} B - \frac{v}{\sqrt{\rho}} A$ converge,

$$\sigma_n^{(\rho)}(\lambda) = \frac{1}{n} \#\{j : \lambda_j^{(n,\rho)} \leq \lambda\} \to \tilde{\sigma}_v(\lambda), \quad n, \rho \to \infty$$

La distribution du demi-cercle de Wigner déplacée par v^2 :

$$\tilde{\sigma}'_v(\lambda) = \frac{1}{2\pi v^2} \sqrt{4v^2 - (\lambda - v^2)^2} \cdot I_{[v^2-2|v|, v^2+2|v|]}(\lambda).$$

Résultat principal

Théorème 1. (K., arXiv-2015) La fonction normalisée de comptage des valeurs propres $\lambda_j^{(n,\rho)}$ de $H^{(n,\rho)}(v) = \frac{v^2}{\rho} B - \frac{v}{\sqrt{\rho}} A$ converge,

$$\sigma_n^{(\rho)}(\lambda) = \frac{1}{n} \#\{j : \lambda_j^{(n,\rho)} \le \lambda\} \to \tilde{\sigma}_v(\lambda), \quad n, \rho \to \infty$$

La distribution du demi-cercle de Wigner déplacée par v^2 :

$$\tilde{\sigma}'_v(\lambda) = \frac{1}{2\pi v^2} \sqrt{4v^2 - (\lambda - v^2)^2} \cdot I_{[v^2 - 2|v|, v^2 + 2|v|]}(\lambda).$$

Ce résultat assez simple et élémentaire peut être démontré par la méthode des moments. La convergence

$$\int \lambda^k \, d\sigma_n^{(\rho)}(\lambda) \to \tilde{m}_k(v) = \int \lambda^k \, d\tilde{\sigma}_v(\lambda), \quad n, \rho \to \infty,$$

implique la convergence faible en probabilité de la suite $\sigma_n^{(\rho)}(\cdot)$.

Graphes aléatoires du "long-range percolation model"

L'ensemble des graphes aléatoires $\{\Gamma_N^{(R)}\}$, $N = 2n+1$ déterminé par

$$\left(A_N^{(R)}\right)_{xy} = 1 - \delta_{xy}, \text{ avec probabilité } \frac{1}{R}\phi\left(\frac{x-y}{R}\right) = p_R,$$
$$0, \text{ avec probabilité } 1 - p_R, \quad |x|, |y| \leq n,$$

Graphes aléatoires du "long-range percolation model"

L'ensemble des graphes aléatoires $\{\Gamma_N^{(R)}\}$, $N = 2n+1$ déterminé par

$$\left(A_N^{(R)}\right)_{xy} = 1 - \delta_{xy}, \text{ avec probabilité } \frac{1}{R}\phi\left(\frac{x-y}{R}\right) = p_R,$$
$$0, \text{ avec probabilité } 1 - p_R, \quad |x|, |y| \le n,$$

où $0 < \phi(t) < 1$ est une fonction paire telle que

$$\phi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt < +\infty.$$

Graphes aléatoires du "long-range percolation model"

L'ensemble des graphes aléatoires $\{\Gamma_N^{(R)}\}$, $N = 2n+1$ déterminé par

$$\left(A_N^{(R)}\right)_{xy} = 1 - \delta_{xy}, \text{ avec probabilité } \frac{1}{R}\phi\left(\frac{x-y}{R}\right) = p_R,$$
$$0, \text{ avec probabilité } 1 - p_R, \quad |x|, |y| \leq n,$$

où $0 < \phi(t) < 1$ est une fonction paire telle que

$$\phi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt < +\infty.$$

Dans ce cas on introduit l'ensemble des matrices aléatoires $N \times N$

$$H_N^{(R)}(v, \phi_1) = \frac{v^2}{\phi_1} B_N^{(R)} - \frac{v}{\sqrt{\phi_1}} A_N^{(R)},$$

et l'analogue du Théorème 1 est vrai avec $m_k^{(N,R)} \to \tilde{m}_k(v, \phi_1)$, $N, R \to \infty$, $R = o(N)$.

Graphes aléatoires du "long-range percolation model"

L'ensemble des graphes aléatoires $\{\Gamma_N^{(R)}\}$, $N = 2n+1$ déterminé par

$$\left(A_N^{(R)}\right)_{xy} = 1 - \delta_{xy}, \text{ avec probabilité } \frac{1}{R}\phi\left(\frac{x-y}{R}\right) = p_R,$$
$$0, \text{ avec probabilité } 1 - p_R, \quad |x|, |y| \leq n,$$

où $0 < \phi(t) < 1$ est une fonction paire telle que

$$\phi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt < +\infty.$$

Dans ce cas on introduit l'ensemble des matrices aléatoires $N \times N$

$$H_N^{(R)}(v, \phi_1) = \frac{v^2}{\phi_1} B_N^{(R)} - \frac{v}{\sqrt{\phi_1}} A_N^{(R)},$$

et l'analogue du Théorème 1 est vrai avec $m_k^{(N,R)} \to \tilde{m}_k(v, \phi_1)$, $N, R \to \infty$, $R = o(N)$.

De plus, $\tilde{m}_k(v, \phi_1) \to \tilde{m}_k(v)$, $\phi_1 \to \infty$.

Dans le cas des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi,

$$-\frac{1}{n}\log Z_{\Gamma^{(n,\rho)}}(u) = \frac{\Theta_n^{(\rho)}(u)}{n} + \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-u^2\right)I + H^{(n,\rho)}\right),$$

où $\Theta_n^{(\rho)}(u) = (r-1)\log(1-u^2)$; $\frac{1}{n}\mathbf{E}\Theta_n^{(\rho)}\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}}\right) \to -\frac{v^2}{2}$, $n, \rho \to \infty$.

Dans le cas des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi,

$$-\frac{1}{n}\log Z_{\Gamma^{(n,\rho)}}(u) = \frac{\Theta_n^{(\rho)}(u)}{n} + \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-u^2\right)I + H^{(n,\rho)}\right),$$

où $\Theta_n^{(\rho)}(u) = (r-1)\log(1-u^2)$; $\frac{1}{n}\mathbf{E}\Theta_n^{(\rho)}\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}}\right) \to -\frac{v^2}{2}$, $n,\rho\to\infty$.

Conjecture : La limite $n,\rho\to\infty$ de la variable

$$F^{(n,\rho)}(v) = \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-\frac{v^2}{\rho}\right)I + \frac{v^2}{\rho}B^{(n,\rho)} - \frac{v}{\sqrt{\rho}}A^{(n,\rho)}\right)$$

existe presque sûrement si $-1/2 < v < 0$, $\rho \gg \log n$.

Questions pour les fonctions zeta d'Ihara

Dans le cas des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi,

$$-\frac{1}{n}\log Z_{\Gamma^{(n,\rho)}}(u) = \frac{\Theta_n^{(\rho)}(u)}{n} + \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-u^2\right)I + H^{(n,\rho)}\right),$$

où $\Theta_n^{(\rho)}(u) = (r-1)\log(1-u^2)$; $\frac{1}{n}\mathbf{E}\Theta_n^{(\rho)}\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}}\right) \to -\frac{v^2}{2}$, $n, \rho \to \infty$.

Conjecture : La limite $n, \rho \to \infty$ de la variable

$$F^{(n,\rho)}(v) = \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-\frac{v^2}{\rho}\right)I + \frac{v^2}{\rho}B^{(n,\rho)} - \frac{v}{\sqrt{\rho}}A^{(n,\rho)}\right)$$

existe presque sûrement si $-1/2 < v < 0$, $\rho \gg \log n$.

- Existe-t-il $V_0 > 0$ tel que $F^{(n,\rho)}(v)$ est correctément définie pour tout $|v| < V_0$ et tous les $\Gamma^{(n,\rho)}$?

Questions pour les fonctions zeta d'Ihara

Dans le cas des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi,

$$-\frac{1}{n}\log Z_{\Gamma^{(n,\rho)}}(u) = \frac{\Theta_n^{(\rho)}(u)}{n} + \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-u^2\right)I + H^{(n,\rho)}\right),$$

où $\Theta_n^{(\rho)}(u) = (r-1)\log(1-u^2)$; $\frac{1}{n}\mathbf{E}\Theta_n^{(\rho)}\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}}\right) \to -\frac{v^2}{2}$, $n,\rho\to\infty$.

Conjecture : La limite $n,\rho\to\infty$ de la variable

$$F^{(n,\rho)}(v) = \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-\frac{v^2}{\rho}\right)I + \frac{v^2}{\rho}B^{(n,\rho)} - \frac{v}{\sqrt{\rho}}A^{(n,\rho)}\right)$$

existe presque sûrement si $-1/2 < v < 0$, $\rho \gg \log n$.

- Existe-t-il $V_0 > 0$ tel que $F^{(n,\rho)}(v)$ est correctément définie pour tout $|v| < V_0$ et tous les $\Gamma^{(n,\rho)}$?

- Est-ce que

$$\mathbf{E}F^{(n,\rho)}(v) \to f(v) = \frac{1}{2\pi v^2}\int_{v^2-2|v|}^{v^2+2|v|}\log(1+\lambda)\sqrt{4v^2-(\lambda-v^2)^2}\,d\lambda\,?$$

Questions pour les fonctions zeta d'Ihara

Dans le cas des graphes aléatoires d'Erdős-Rényi,

$$-\frac{1}{n}\log Z_{\Gamma^{(n,\rho)}}(u) = \frac{\Theta_n^{(\rho)}(u)}{n} + \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-u^2\right)I + H^{(n,\rho)}\right),$$

où $\Theta_n^{(\rho)}(u) = (r-1)\log(1-u^2)$; $\frac{1}{n}\mathbf{E}\Theta_n^{(\rho)}\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}}\right) \to -\frac{v^2}{2}$, $n,\rho\to\infty$.

Conjecture : La limite $n,\rho\to\infty$ de la variable

$$F^{(n,\rho)}(v) = \frac{1}{n}\log\det\left(\left(1-\frac{v^2}{\rho}\right)I + \frac{v^2}{\rho}B^{(n,\rho)} - \frac{v}{\sqrt{\rho}}A^{(n,\rho)}\right)$$

existe presque sûrement si $-1/2 < v < 0$, $\rho \gg \log n$.

- Existe-t-il $V_0 > 0$ tel que $F^{(n,\rho)}(v)$ est correctément définie pour tout $|v| < V_0$ et tous les $\Gamma^{(n,\rho)}$?

- Est-ce que

$$F^{(n,\rho)}(v) \to f(v) = \frac{1}{2\pi v^2}\int_{v^2-2|v|}^{v^2+2|v|}\log(1+\lambda)\sqrt{4v^2-(\lambda-v^2)^2}\,d\lambda\ ?$$

Bibliographie

- Y. Ihara, On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966) 219-235

- A. Terras, *Zeta functions of graphs*, Cambridge Universite Press (2011)

- H. Bass, The Ihara-Zelberg zeta function of a tree lattice, *Internat. J. Math.* **3** (1992) 717-797

- R. Grigorchuk and A. Zuk, The Ihara zeta function of infinite graphs, the KNS spectral measure and integrable maps, in : *Random walks and geometry*, de Gruyter, Berlin (2004) 141-180

- D. Lenz, F. Pogorzelski and M. Schmidt, The Ihara zeta function for infinite graphs, arXiv :1408.3522

- O. Khorunzhiy, A note on Ihara zeta function of large random graphs, arXiv : 1508.07839