Krigeage sous Contraintes Appliqué à la Finance

Kriging of Financial Term-Structures

Hassan Maatouk[1 2]

[1]École des Mines de St-Étienne (EMSE), hassan.maatouk@mines-stetienne.fr
[2]Institut National des Sciences Appliquées (INSA, Lyon), hassan.maatouk@insa-lyon.fr

Journées MAS 2016 Grenoble, 29 - 31 Août 2016

INSPIRING INNOVATION INNOVANTE PAR TRADITION

Plan

Plan

1. Introduction générale et exemple numérique motivé
2. Modèle d'approximation fini-dimensionnel de processus gaussiens
3. Illustration numérique
4. Généralisation de la correspondance de Kimeldorf-Wahba
5. Application réelle en Assurance et Finance : estimation d'une courbe d'actualisation

Régression par Processus Gaussien (RPG)

- On considère le problème d'interpolation d'une fonction numérique :

$$y = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

- Données : $f\left(\boldsymbol{x}^{(i)}\right) = y_i,\ i = 1, \ldots, n.$

- La sortie y est vue comme une réalisation d'un processus Y :

$$Y(\boldsymbol{x}) := \eta(\boldsymbol{x}) + Z(\boldsymbol{x}),$$

avec η la moyenne et Z un PG centré de noyau de covariance K.

- Le processus conditionnel est encore un PG de loi :

$$\left\{ Y(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, Y\left(x^{(1)}\right) = y_1, \ldots, Y\left(x^{(n)}\right) = y_n \right\} \sim \mathcal{N}\left(\zeta(\boldsymbol{x}), \tau^2(\boldsymbol{x})\right),$$

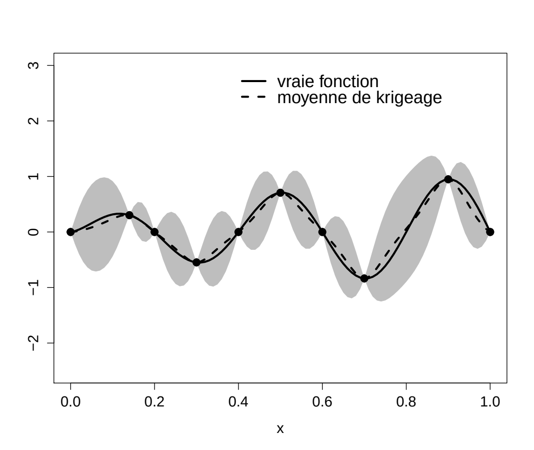
avec

$$\begin{cases} \zeta(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})^\top \mathbb{K}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}) \\ \tau^2(\boldsymbol{x}) = K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})^\top \mathbb{K}^{-1} \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

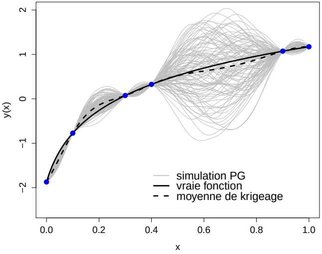
$\boldsymbol{\mu}_i = \eta(\boldsymbol{x}^{(i)})$, $\mathbb{K}_{i,j} = K\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{x}^{(j)}\right),\ i, j = 1, \ldots, n$ et $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})_i = \left(K\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{(i)}\right)\right)$.

Régression par Processus Gaussien

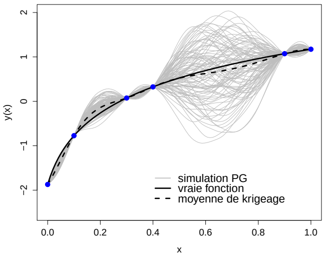
Soit $f(x) = \sqrt{x} \times sin(5\pi x)$ la 'vraie' fonction à interpoler.

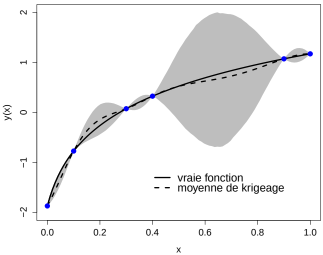


Motivation sur un exemple (Golchi et al., 2015)

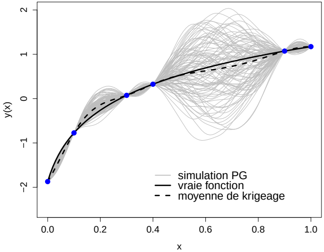


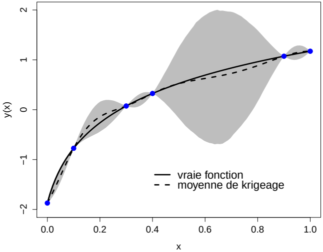
Motivation sur un exemple (Golchi et al., 2015)

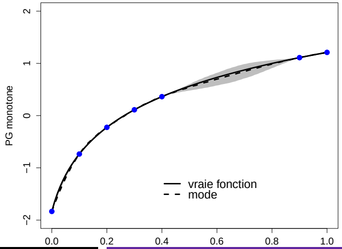




Motivation sur un exemple (Golchi et al., 2015)







RPG sous contraintes inégalité

- I espace des fonctions interpolantes : $f\left(x^{(i)}\right) = y_i,\ i = 1, \ldots, n.$
- C espace des contraintes (positivité, monotonie, convexité, etc.).
- $(Y(\boldsymbol{x}))_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^d}$ PG centré de fonction de covariance :

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \mathrm{Cov}\left(Y(\boldsymbol{x}), Y(\boldsymbol{x}')\right) = \mathbb{E}\left(Y(\boldsymbol{x})Y(\boldsymbol{x}')\right).$$

- **Formulation du problème en général :** calculer (simuler) la loi conditionnelle du processus gaussien Y sachant :

$$\begin{cases} Y(\boldsymbol{x}^{(i)}) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ Y \in C. \end{cases} \qquad (I \cap C)$$

Remarque

La difficulté du problème vient des contraintes inégalité puisque le processus conditionnel $Y \mid Y \in I \cap C$ n'est plus un processus gaussien.

RPG sous contraintes inégalité

- I espace des fonctions interpolantes : $f\left(x^{(i)}\right) = y_i,\ i = 1, \ldots, n$.
- C espace des contraintes (positivité, monotonie, convexité, etc.).
- $(Y(\boldsymbol{x}))_{\boldsymbol{x} \in [0,1]^d}$ PG centré de fonction de covariance :

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \mathrm{Cov}\left(Y(\boldsymbol{x}), Y(\boldsymbol{x}')\right) = \mathbb{E}\left(Y(\boldsymbol{x})Y(\boldsymbol{x}')\right).$$

- **Formulation du problème en général :** calculer (simuler) la loi conditionnelle du processus gaussien Y sachant :

$$\begin{aligned} &Y(\boldsymbol{x}^{(i)}) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &Y \in C. \end{aligned} \qquad (I \cap C)$$

Remarque

La difficulté du problème vient des contraintes inégalité puisque le processus conditionnel $Y \mid Y \in I \cap C$ n'est plus un processus gaussien.

RPG sous contraintes inégalité

- I espace des fonctions interpolantes : $f\left(x^{(i)}\right) = y_i,\ i = 1, \ldots, n.$
- C espace des contraintes (positivité, monotonie, convexité, etc.).
- $(Y(\boldsymbol{x}))_{\boldsymbol{x}\in[0,1]^d}$ PG centré de fonction de covariance :

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \mathrm{Cov}\left(Y(\boldsymbol{x}), Y(\boldsymbol{x}')\right) = \mathbb{E}\left(Y(\boldsymbol{x})Y(\boldsymbol{x}')\right).$$

- **Formulation du problème en général :** calculer (simuler) la loi conditionnelle du processus gaussien Y sachant :

$$\begin{aligned} &Y(\boldsymbol{x}^{(i)}) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &Y \in C. \end{aligned} \qquad (I \cap C)$$

Remarque

La difficulté du problème vient des contraintes inégalité puisque le processus conditionnel $Y \mid Y \in I \cap C$ n'est plus un processus gaussien.

Plan

RPG sous contraintes inégalité

- **Méthodologie proposée :** approximation des trajectoires du processus gaussien Y par un processus fini-dimensionnel Y^N de la forme

$$Y^N(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=0}^{N} \xi_j \phi_j(\boldsymbol{x}),$$

avec $\xi = (\xi_0 \cdots \xi_N)^\top$ de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma^N)$ et les $\{\phi_j\}$ fonctions déterministes.

Propriété fondamentale des fonctions de base $(\phi_j)_{j=0,\cdots,N}$

On choisit les $\{\phi_j\}$ de sorte que

- $Y^N(.)$ fonction **positive** $\Longleftrightarrow$ $\xi_j \geq 0$; $0 \leq j \leq N$.
- $Y^N(.)$ **à valeurs dans** $[a, b]$ $\Longleftrightarrow$ $a \leq \xi_j \leq b$; $0 \leq j \leq N$.
- $Y^N(.)$ **croissante** $\Longleftrightarrow$ $\xi_j \geq 0$; $0 \leq j \leq N$.
- $Y^N(.)$ **convexe** $\Longleftrightarrow$ $\xi_j \geq 0$; $0 \leq j \leq N$.

RPG sous contraintes inégalité

- **Méthodologie proposée :** approximation des trajectoires du processus gaussien Y par un processus fini-dimensionnel Y^N de la forme

$$Y^N(\boldsymbol{x}) := \sum_{j=0}^{N} \xi_j \phi_j(\boldsymbol{x}),$$

avec $\xi = (\xi_0 \cdots \xi_N)^\top$ de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma^N)$ et les $\{\phi_j\}$ fonctions déterministes.

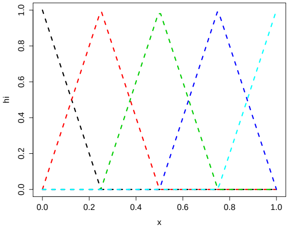
Propriété fondamentale des fonctions de base $(\phi_j)_{j=0,\cdots,N}$

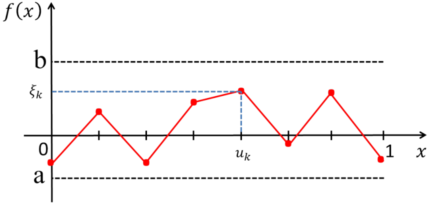
On choisit les $\{\phi_j\}$ de sorte que

- $Y^N(.)$ fonction **positive** $\Longleftrightarrow$ $\xi_j \geq 0\ ;\ 0 \leq j \leq N.$
- $Y^N(.)$ **à valeurs dans** $[a, b]$ $\Longleftrightarrow$ $a \leq \xi_j \leq b\ ;\ 0 \leq j \leq N.$
- $Y^N(.)$ **croissante** $\Longleftrightarrow$ $\xi_j \geq 0\ ;\ 0 \leq j \leq N.$
- $Y^N(.)$ **convexe** $\Longleftrightarrow$ $\xi_j \geq 0\ ;\ 0 \leq j \leq N.$

Contraintes de bornes en 1D

1. $C = \{f \; : \; [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; a \leq f(x) \leq b\}$.
2. Les fonctions de base $(h_j)_j$ sont les fonctions 'chapeau' associées à des nœuds $(u_j)_{j=0,\ldots,N}$ telles que : $h_j(u_k) = \delta_{j,k}$.





- $Y^N(x) = \sum_{j=0}^N \xi_j h_j(x)$ et $Y^N(u_k) = \sum_{j=0}^N \xi_j h_j(u_k) = \sum_{j=0}^N \xi_j \delta_{j,k} = \xi_k$.
- $Y^N(x) = \sum_{j=0}^N Y^N(u_j) h_j(x)$ fonction continue affine par morceaux.

$$Y^N(x) = \sum_{j=0}^{N} Y^N(u_j) h_j(x) \in [a,b], \; \forall x \iff \xi_j = Y^N(u_j) \in [a,b], \; j = 0, \ldots, N$$

Matrice de covariance des coefficients ξ_j

Par le choix spécifique des fonctions de base, on a

$$Y^N(x) := \sum_{j=0}^{N} \xi_j h_j(x) = \sum_{j=0}^{N} Y^N(u_j) h_j(x).$$

La convergence uniforme (trajectoire par trajectoire) de Y^N vers Y est assurée si $Y^N(u_j) = Y(u_j)$. Par suite,

$$Y^N(x) = \sum_{j=0}^{N} Y(u_j) h_j(x).$$

Matrice de covariance des coefficients ξ_j

Par le choix spécifique des fonctions de base, on a

$$Y^N(x) := \sum_{j=0}^{N} \xi_j h_j(x) = \sum_{j=0}^{N} Y^N(u_j) h_j(x).$$

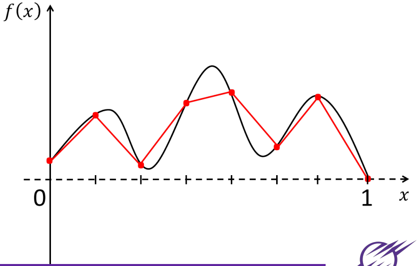
La convergence uniforme (trajectoire par trajectoire) de Y^N vers Y est assurée si $Y^N(u_j) = Y(u_j)$. Par suite,

$$Y^N(x) = \sum_{j=0}^{N} Y(u_j) h_j(x).$$

$$\begin{aligned} \Gamma^N_{i,j} &= \mathrm{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathrm{Cov}(Y(u_i), Y(u_j)) \\ &= K(u_i, u_j), \end{aligned}$$

avec K noyau de covariance du PG initial Y.

$$\mathrm{Cov}\left(Y^N(x), Y^N(x')\right) = h(x)^\top \Gamma^N h(x).$$



Nouvelle formulation du problème - cas de la monotonie en 1D

Le problème de régression pour Y^N est équivalent à la simulation du vecteur gaussien ξ sachant :

$$(A\xi)_i := Y^N\left(x^{(i)}\right) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(n conditions d'interpolation)} \quad I_\xi$$
$$\xi_j \geq 0, \quad j = 0, \ldots, N \qquad \text{(N+1 contraintes d'inégalité)} \quad C_\xi$$

avec $A_{i,j} := \phi_j\left(x^{(i)}\right)$ et $A_{i,-1} = 1,\ i = 1, \ldots, n$.

On se ramène ainsi à la simulation d'un vecteur gaussien tronqué à un espace convexe.

Simulation des trajectoires :

1. Loi du vecteur gaussien ξ sous les conditions d'interpolation :
   $\xi \mid A\xi = \boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}\left(\left(A\Gamma^N\right)^\top \left(A\Gamma^N A^\top\right)^{-1} \boldsymbol{y}, \Gamma^N - \left(A\Gamma^N\right)^\top \left(A\Gamma^N A^\top\right)^{-1} A\Gamma^N\right)$.
2. Par un algorithme de rejet accéléré, on simule la loi conditionnelle :
   $$\xi \mid A\xi = \boldsymbol{y} \text{ et } \xi \in C_\xi := \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N+1} \ :\ \xi_j \geq 0,\ j = 0, \ldots, N\right\}.$$
3. Au final, avec le modèle $Y^N(x)$, on génère des trajectoires vérifiant à la fois les conditions d'interpolation et la monotonie sur tout le domaine.

Nouvelle formulation du problème - cas de la monotonie en 1D

Le problème de régression pour Y^N est équivalent à la simulation du vecteur gaussien ξ sachant :

$$\begin{array}{lr} (A\xi)_i := Y^N\left(x^{(i)}\right) = y_i, \quad i = 1, \dots, n & \text{(n conditions d'interpolation)} \quad I_\xi \\ \xi_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, N & \text{(N+1 contraintes d'inégalité)} \quad C_\xi \end{array}$$

avec $A_{i,j} := \phi_j\left(x^{(i)}\right)$ et $A_{i,-1} = 1,\ i = 1, \dots, n.$

On se ramène ainsi à la simulation d'un vecteur gaussien tronqué à un espace convexe.

Simulation des trajectoires :

1. Loi du vecteur gaussien ξ sous les conditions d'interpolation :
   $\xi \mid A\xi = \boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}\left(\left(A\Gamma^N\right)^\top\left(A\Gamma^N A^\top\right)^{-1}\boldsymbol{y}, \Gamma^N - \left(A\Gamma^N\right)^\top\left(A\Gamma^N A^\top\right)^{-1}A\Gamma^N\right).$
2. Par un algorithme de rejet accéléré, on simule la loi conditionnelle :
   $$\xi \mid A\xi = \boldsymbol{y} \text{ et } \xi \in C_\xi := \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N+1} \ :\ \xi_j \geq 0,\ j = 0, \dots, N\right\}.$$
3. Au final, avec le modèle $Y^N(x)$, on génère des trajectoires vérifiant à la fois les conditions d'interpolation et la monotonie sur tout le domaine.

MINES Saint-Étienne

Nouvelle formulation du problème - cas de la monotonie en 1D

Le problème de régression pour Y^N est équivalent à la simulation du vecteur gaussien ξ sachant :

$$
\begin{aligned}
&(A\xi)_i := Y^N\left(x^{(i)}\right) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n && \text{(n conditions d'interpolation)} \quad I_\xi \\
&\xi_j \geq 0, \quad j = 0, \ldots, N && \text{(N+1 contraintes d'inégalité)} \quad C_\xi
\end{aligned}
$$

avec $A_{i,j} := \phi_j\left(x^{(i)}\right)$ et $A_{i,-1} = 1,\ i = 1, \ldots, n$.

On se ramène ainsi à la simulation d'un vecteur gaussien tronqué à un espace convexe.

Simulation des trajectoires :

1. Loi du vecteur gaussien ξ sous les conditions d'interpolation :
   $\xi \mid A\xi = \boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}\left(\left(A\Gamma^N\right)^\top \left(A\Gamma^N A^\top\right)^{-1} \boldsymbol{y}, \Gamma^N - \left(A\Gamma^N\right)^\top \left(A\Gamma^N A^\top\right)^{-1} A\Gamma^N\right).$
2. Par un algorithme de rejet accéléré, on simule la loi conditionnelle :
   $$\xi \mid A\xi = \boldsymbol{y} \text{ et } \xi \in C_\xi := \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N+1} \ : \ \xi_j \geq 0,\ j = 0, \ldots, N\right\}.$$
3. Au final, avec le modèle $Y^N(x)$, on génère des trajectoires vérifiant à la fois les conditions d'interpolation et la monotonie sur tout le domaine.

Simulation d'un vecteur gaussien tronqué

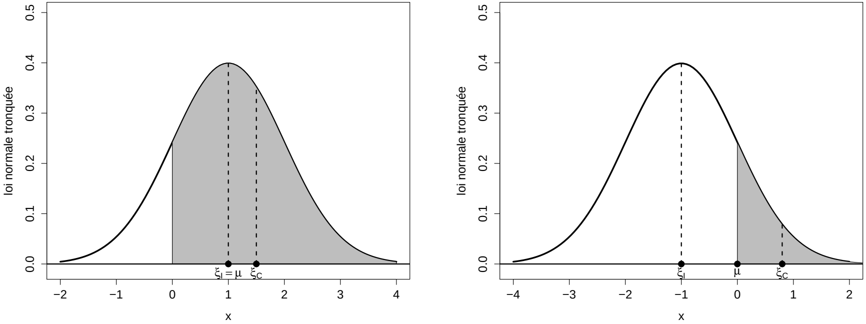


Figure: Deux cas de simulation d'une loi normale tronquée. La moyenne est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de la zone d'acceptation Figure de gauche (resp. Figure de droite).

Plan

Illustration numérique - cas monotonie 1D

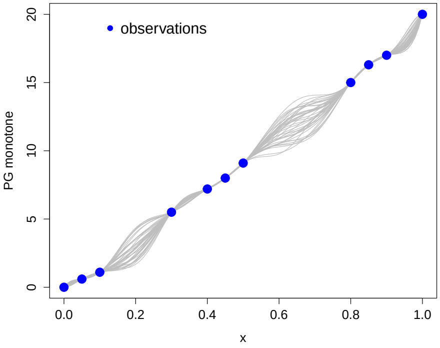


Illustration numérique - cas monotonie 1D

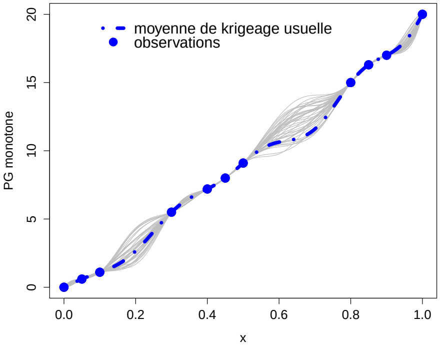


Illustration numérique - cas monotonie 1D

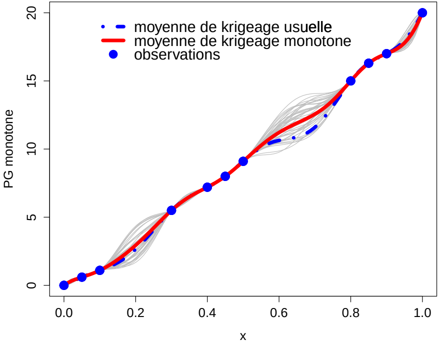


Illustration numérique - cas monotonie 1D

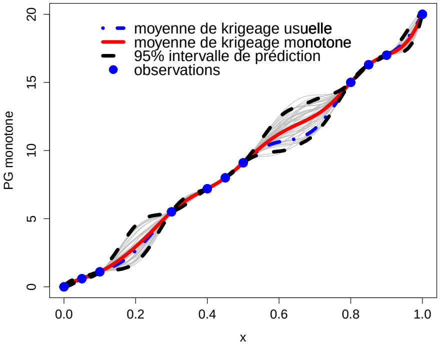


Illustration numérique - cas monotonie 1D

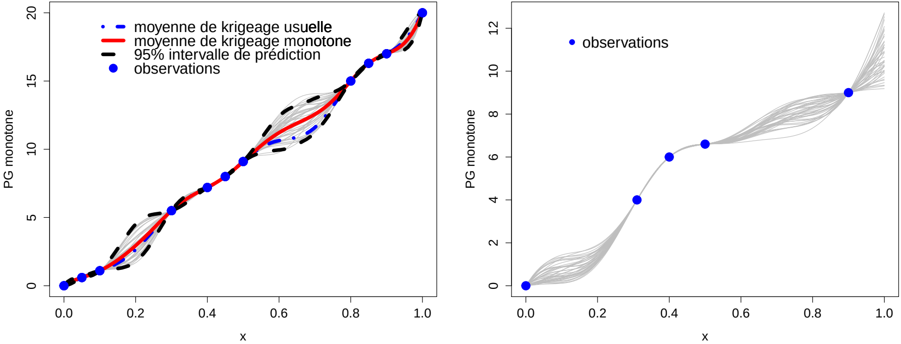
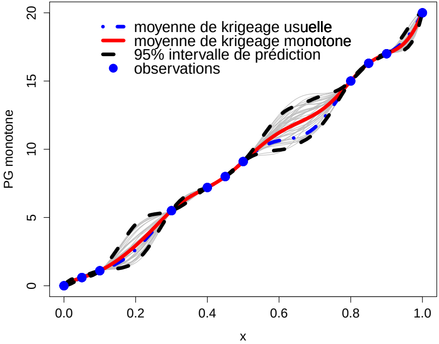


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement monotone (courbes en gris). La moyenne de Krigeage usuelle (pointillé-tirets) coincide avec le mode sur la figure de gauche, mais pas sur celle de droite.

Illustration numérique - cas monotonie 1D



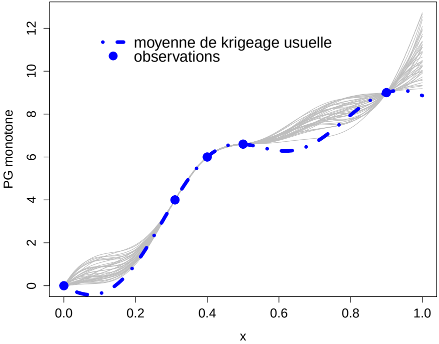


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement monotone (courbes en gris). La moyenne de Krigeage usuelle (pointillé-tirets) coincide avec le mode sur la figure de gauche, mais pas sur celle de droite.

Illustration numérique - cas monotonie 1D

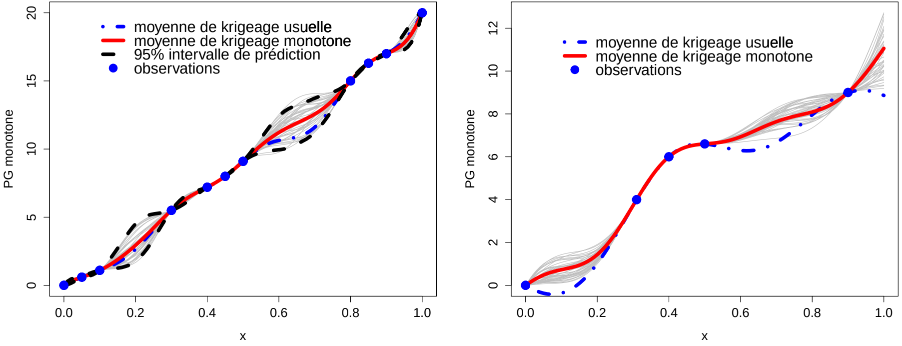


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement monotone (courbes en gris). La moyenne de Krigeage usuelle (pointillé-tirets) coincide avec le mode sur la figure de gauche, mais pas sur celle de droite.

Illustration numérique - cas monotonie 1D

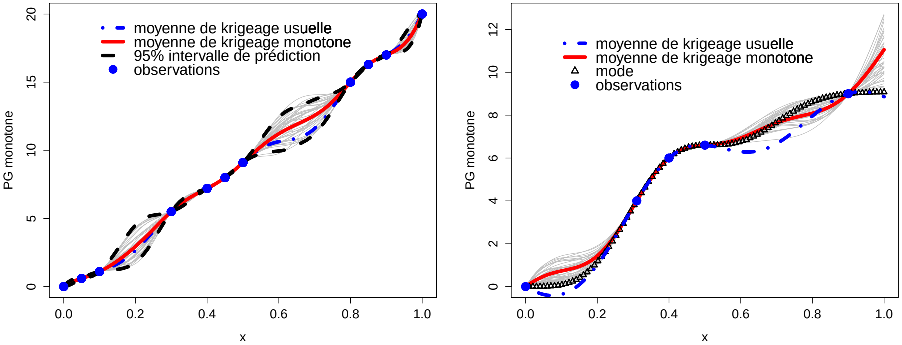


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement monotone (courbes en gris). La moyenne de Krigeage usuelle (pointillé-tirets) coincide avec le mode sur la figure de gauche, mais pas sur celle de droite.

Illustration numérique - cas monotonie 1D

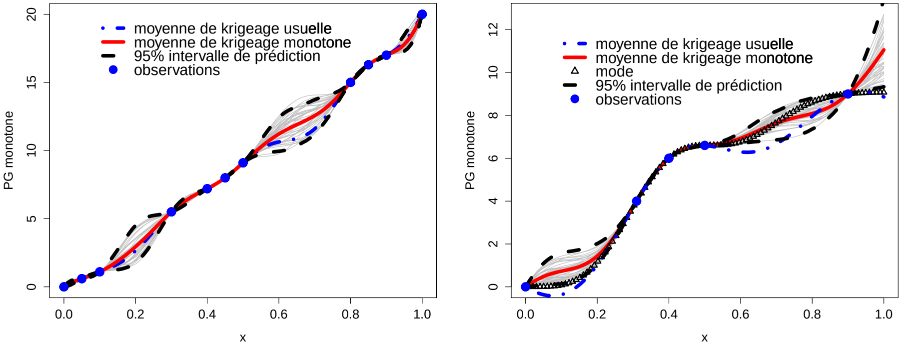


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement monotone (courbes en gris). La moyenne de Krigeage usuelle (pointillé-tirets) coincide avec le mode sur la figure de gauche, mais pas sur celle de droite.

Illustration numérique - cas de bornes inférieure et supérieure

Approximation finie-dimensionnelle (rappel) :

$$Y^N(x) := \sum_{j=0}^{N} \xi_j h_j(x) = \sum_{j=0}^{N} Y(u_j) h_j(x). \tag{1}$$

Illustration numérique - cas de bornes inférieure et supérieure

Approximation finie-dimensionnelle (rappel) :

$$Y^N(x) := \sum_{j=0}^{N} \xi_j h_j(x) = \sum_{j=0}^{N} Y(u_j) h_j(x). \quad (1)$$

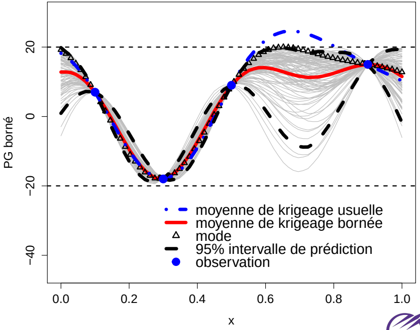
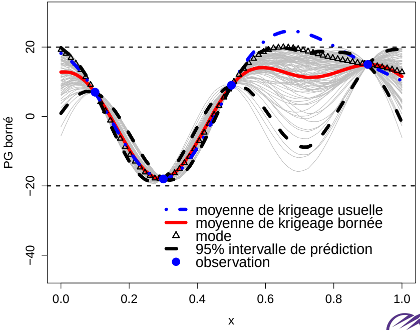


Illustration numérique - cas de bornes inférieure et supérieure

Approximation finie-dimensionnelle (rappel) :

$$Y^N(x) := \sum_{j=0}^{N} \xi_j h_j(x) = \sum_{j=0}^{N} Y(u_j) h_j(x). \quad (1)$$

- Les fonctions de base $h_j,\ j = 0, \ldots, N$ sont les fonctions 'chapeau'.
- $Y^N(x) \in [a, b]$ ssi $Y(u_j) \in [a, b]$.
- Les trajectoires du processus gaussien conditionnel varient entre -20 et 20.
- La moyenne et le Mode respectent les contraintes contrairement à la moyenne de krigeage usuelle.



Plan

Correspondance naturelle avec les splines d'interpolation

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{h \in H \cap I} \|h\|_H^2, \qquad (Q)$$

- où H RKHS de noyau reproduisant K égal au noyau de covariance du processus gaussien Y,
- I espace des fonctions qui vérifient les conditions d'interpolation.

Théorème (Kimeldorf and Wahba 1970)

Le problème (Q) admet une solution unique qui est la moyenne de krigeage :

$$h_{opt}(x) = \boldsymbol{k}(x)^\top \mathbb{K}^{-1} \boldsymbol{y}, \qquad (2)$$

où $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$, $\boldsymbol{k}(x) = \left(K\left(x^{(i)}, x\right)\right)_{i=1,\ldots,n}$ *et* $\mathbb{K}_{i,j} = \left(K\left(x^{(i)}, x^{(j)}\right)\right)$.

Correspondance naturelle avec les splines d'interpolation

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{h \in H \cap I} \|h\|_H^2, \tag{Q}$$

- où H RKHS de noyau reproduisant K égal au noyau de covariance du processus gaussien Y,
- I espace des fonctions qui vérifient les conditions d'interpolation.

Théorème (Kimeldorf and Wahba 1970)

Le problème (Q) admet une solution unique qui est la moyenne de krigeage :

$$h_{opt}(x) = \boldsymbol{k}(x)^\top \mathbb{K}^{-1} \boldsymbol{y}, \tag{2}$$

où $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$, $\boldsymbol{k}(x) = \left(K\left(x^{(i)}, x\right)\right)_{i=1,\dots,n}$ *et* $\mathbb{K}_{i,j} = \left(K\left(x^{(i)}, x^{(j)}\right)\right)$.

Correspondance avec les splines d'interpolation contraintes

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{h \in H \cap I \cap C} \|h\|_H^2, \qquad (P)$$

- H RKHS de n.r. K = noyau de covariance du processus gaussien Y,
- I espace des fonctions interpolantes,
- C espace des fonctions qui vérifient les contraintes inégalité (e.g. monotonie, convexité, etc.).

Théorème (X.Bay, L.Grammont, H. Maatouk, 2016. Electron. J. Statist.)

Le Mode ou MAP (Maximum A Posteriori) converge vers la spline contrainte :

$$M_{IK}^N(x) := \sum_{j=0}^{N} \mu_j \phi_j(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{\|\ \|_\infty} h_{opt} := \arg \min_{h \in H \cap I \cap C} \|h\|_H^2.$$

Illustrations numériques de la correspondance

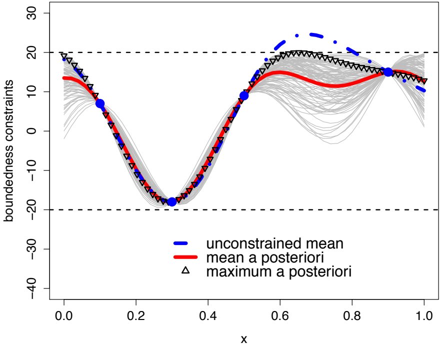


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement borné (courbes en gris). La moyenne de krigeage usuelle (courbe en tirets) coincide avec le mode sur la figure de droite, mais pas sur celle de gauche. Le noyau gaussien est utilisé avec les paramètres fixés à $(\sigma, \theta) = (5, 0.2)$.

Illustrations numériques de la correspondance

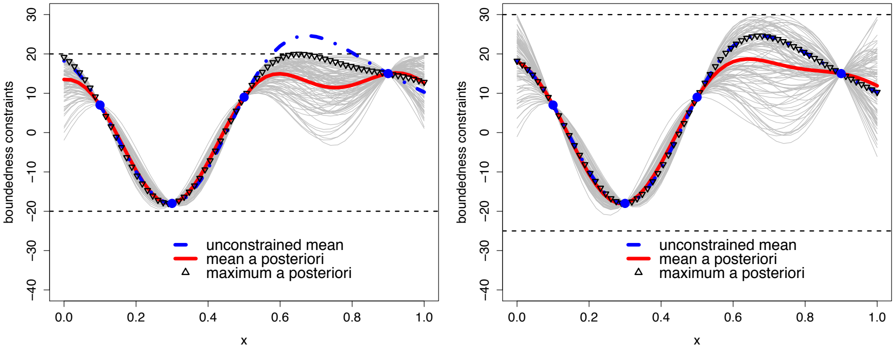


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement borné (courbes en gris). La moyenne de krigeage usuelle (courbe en tirets) coincide avec le mode sur la figure de droite, mais pas sur celle de gauche. Le noyau gaussien est utilisé avec les paramètres fixés à $(\sigma, \theta) = (5, 0.2)$.

Illustrations numériques de la correspondance

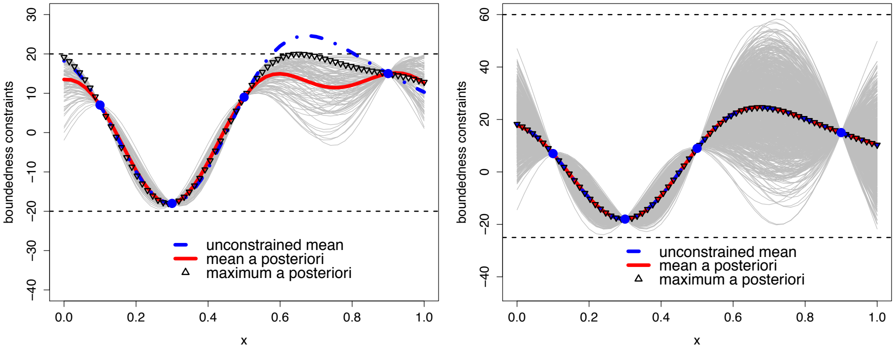


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement borné (courbes en gris). La moyenne de krigeage usuelle (courbe en tirets) coincide avec le mode sur la figure de droite, mais pas sur celle de gauche. Le noyau gaussien est utilisé avec les paramètres fixés à $(\sigma, \theta) = (5, 0.2)$.

Plan

Estimation d'une courbe d'actualisation

- La courbe d'actualisation est une fonction *a priori* décroissante avec le temps, qui démarre de 1 et qui vérifie les conditions linéaires de type égalité suivantes :

$$A \cdot f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}, \qquad f(\boldsymbol{X}) = \left(f\left(x^{(1)}\right), \dots, f\left(x^{(n)}\right)\right)^\top, \tag{3}$$

où A est une matrice de dimension $m \times n$, $m, n \geq 1$ et où $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

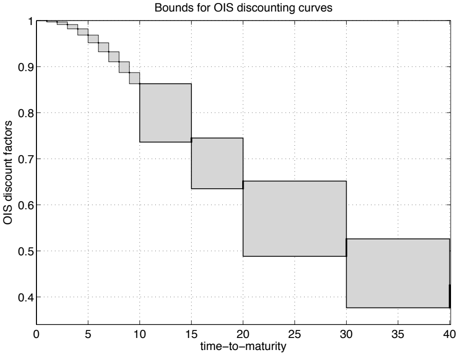


Figure: Cousin and Niang 2014.

Estimation d'une courbe d'actualisation

Dans le cadre de la Régression par Processus Gaussien, on considère Y un PG de moyenne μ et de fonction de covariance K. La loi conditionnelle de Y sachant (3) est :

$$Y(\boldsymbol{x}) \mid A \cdot Y(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b} \;\sim\; \mathcal{N}(\eta(\boldsymbol{x}), \tau^2(\boldsymbol{x})),$$

où

$$\begin{cases} \eta(\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}))^\top \left(A\mathbb{K}A^\top\right)^{-1} (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{\mu}) \\ \tau^2(\boldsymbol{x}) = K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (A\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}))^\top \left(A\mathbb{K}A^\top\right)^{-1} A\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{\mu} = \mu(\boldsymbol{X}) = \left(\mu\left(x^{(1)}\right), \ldots, \mu\left(x^{(n)}\right)\right)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ le vecteur de covariance entre $Y(\boldsymbol{x})$ et $Y(\boldsymbol{X})$ et $\mathbb{K}$ la matrice de covariance de $Y(\boldsymbol{X})$.

Estimation d'une courbe d'actualisation

Modèle d'interpolation monotone

$$Y^N(x) = Y(0) + \sum_{j=0}^{N} Y'(u_j)\phi_j(x) = \eta + \sum_{j=0}^{N} \xi_j \phi_j(x),$$

où $\boldsymbol{\xi} = (\eta, \xi_0, \ldots, \xi_N)^\top \in \mathbb{R}^{N+2}$ est un vecteur gaussien et où $(\phi_j)_{0 \leq j \leq N}$ sont les fonctions de base.

Contraintes linéaires de type égalité pour le modèle approché $Y^N(x)$:

$$A \cdot Y^N(\boldsymbol{X}) = A \cdot \left(\eta + \sum_{j=0}^{N} \xi_j \phi_j(\boldsymbol{X}) \right) = (A \cdot H) \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b},$$

où la matrice H de taille $n \times (N+2)$ est définie par :

$$H_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 1, \\ \phi_{j-2}\left(x^{(i)}\right) & \text{pour } i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 2, \ldots, N+2. \end{cases}$$

Estimation de la courbe d'actualisation en utilisant les données Swap vs Euribor 6M à la date de cotation 02/06/2010

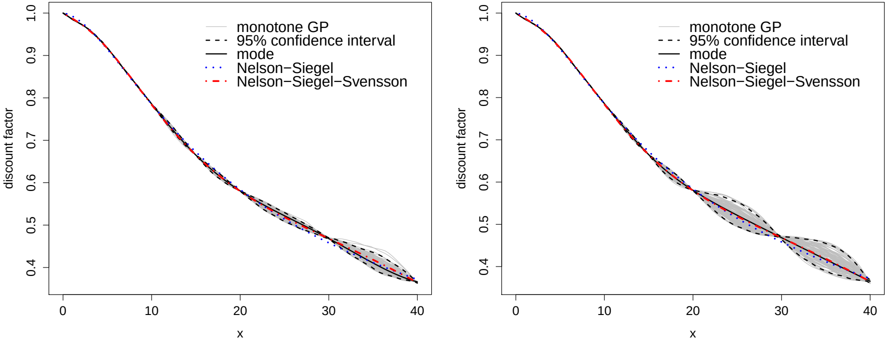


Figure: Simulation d'un PG conditionnellement décroissant. Le noyau gaussien (resp. Matérn 3/2) est utilisé sur la Figure de gauche (resp. Figure de droite).

Estimation du taux d'intérêt à une date de quotation Swap vs Euribor 6M le 02/06/2010

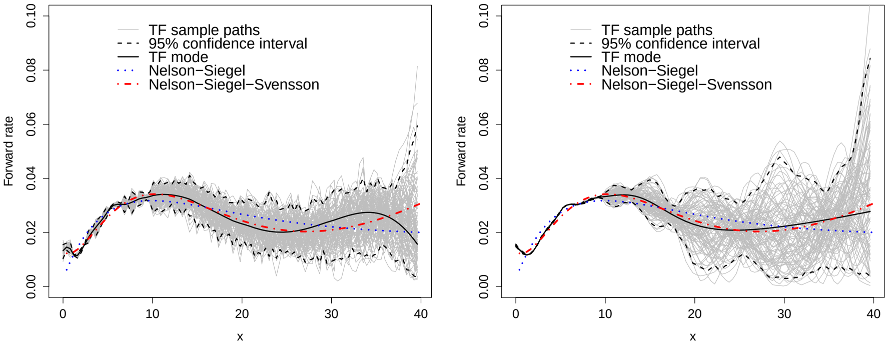


Figure: Simulations du taux forward et mode du PG conditionnel. Le noyau gaussien (resp. Matérn 3/2) est utilisé sur la Figure de gauche (resp. Figure de droite).

Plusieurs dates de cotation Swap vs Euribor 6M

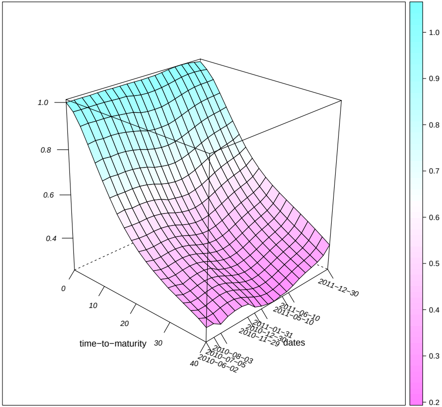


Figure: Le mode du processus gaussien conditionnellement monotone par rapport à la première variable. La première variable représente la maturité, la deuxième les différentes dates de cotation.

Références

Bay, X., Grammont, L., and Maatouk, H. (2016). Generalization of the kimeldorf-wahba correspondence for constrained interpolation. Electron. J. Statist., 10(1):1580–1595.

Cousin, A., Maatouk, H., and Rullière, D. (2016). Kriging of financial term-structures. European Journal of Operational Research, 255(2):631 – 648.

Cousin, A. and Niang, I. (2014). On the Range of Admissible Term-Structures.

Golchi, S., Bingham, D., Chipman, H., and Campbell, D. (2015). Monotone Emulation of Computer Experiments. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, 3(1):370–392.

Kimeldorf, G. S. and Wahba, G. (1970). A Correspondence Between Bayesian Estimation on Stochastic Processes and Smoothing by Splines. The Annals of Mathematical Statistics, 41(2):495–502.

Maatouk, H. and Bay, X. (2014). Gaussian Process Emulators for Computer Experiments with Inequality Constraints.

Maatouk, H. and Bay, X. (2016). A New Rejection Sampling Method for Truncated Multivariate Gaussian Random Variables Restricted to Convex Sets, pages 521–530. Springer International Publishing, Cham.

Maatouk, H. and Richet, Y. (2015). constrKriging. R package available online at https://github.com/maatouk/constrKriging.

Maatouk, H., Roustant, O., and Richet, Y. (2015). Cross-Validation Estimations of Hyper-Parameters of Gaussian Processes with Inequality Constraints. Procedia Environmental Sciences, 27:38 – 44. Spatial Statistics conference 2015.