Comportement en temps long de l'équation de Fokker-Planck libre pour certains potentiels non convexes

Mylène Maïda

Université Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé

Travail en collaboration avec Catherine Donati-Martin et Benjamin Groux
Université Versailles-Saint Quentin

Journées MAS 2016 - Grenoble

L'équation de Fokker-Planck libre

On se donne un potentiel $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on cherche un processus $(\mu_t)_{t\geq 0}$ (à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) vérifiant :

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_t\left(\frac{1}{2}V' - H\mu_t\right)\right],$$

où

$$H\mu_t(x) = \mathrm{vp}\int \frac{1}{x-y}\,d\mu_t(y), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Souvent appelée "Mac Kean-Vlasov ou Fokker-Planck avec interaction logarithmique"
Pour tout φ régulière,

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x)d\mu_t(x) = -\frac{1}{2}\int V'(x)\varphi'(x)d\mu_t(x) + \iint \frac{\varphi'(x)-\varphi'(y)}{x-y}d\mu_t(x)d\mu_t(y)$$

Quel est le comportement asymptotique de μ_t quand $t \to +\infty$?

Plan de l'exposé

- Introduction, motivations, résultats connus
- Convergence pour un potentiel non convexe
- Rappel de probabilités libres
- Étude des mesures critiques
- Conclusion

Motivation : étude des équations des milieux granulaires

Plusieurs équations issues de la physique peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \nabla . \left[\mu_t \nabla (\mathcal{U}'(\mu_t) + \mathcal{V} + \mathcal{W} * \mu_t) \right] .$$

où $\mathcal{U}$ représente une énergie interne, $\mathcal{V}$ un potentiel externe (confinant) et $\mathcal{W}$ une énergie d'interaction.

Exemples/biblio : équation de Fokker-Planck linéaire ($\mathcal{U}(s) = s \ln s$, $\mathcal{W}(s) = 0$), équation des milieux poreux ($\mathcal{U} = 0$, $\mathcal{W}$ polynomial ou convexe) [Benedetto-Caglioti-Carrillo-Pulvirenti, Malrieu, Carrillo-McCann-Villani, Bolley-Gentil-Guillin etc.].

Fokker-Planck libre est donnée par $\mathcal{U} = 0, \mathcal{W} = -\ln, d = 1$
[cf aussi Carrillo-Castorina-Volzone en $d = 2$].

Remarque : L'interaction logarithmique en dimension 1 est typique en matrices aléatoires.

Motivation : point de vue probabiliste

Si le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifie l'EDS (classique, en dimension 1)

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2}V'(X_t)dt,$$

sa loi $(\mu_t)_{t\geq 0}$ vérifie l'équation de Fokker-Planck linéaire

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \Delta \mu_t + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\mu_t V'.$$

Si on veut faire apparaître des interactions $\mathcal{W}$ non triviales, il faut considérer la mesure empirique $L_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i^N(t)}$ d'un système de particules de la forme

$$d\lambda_i^N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}dB_i(t) + \frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\mathcal{W}'\left(\lambda_i^N(t) - \lambda_j^N(t)\right)dt - \frac{1}{2}V'(\lambda_i^N(t))dt.$$

Le mouvement brownien de Dyson généralisé

Soit $(\tilde{B}_t^N)_{t\geq 0}$ une matrice hermitienne $N \times N$ à coefficients browniens. On appelle mouvement brownien de Dyson le processus des valeurs propres $(\lambda_1^N(t), \ldots, \lambda_N^N(t))_{t\geq 0}$ de $(\tilde{B}_t^N/\sqrt{N})_{t\geq 0}$.

Celles-ci satisfont le système d'EDS

$$d\lambda_i^N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j\neq i} \frac{1}{\lambda_i^N(t) - \lambda_j^N(t)} dt$$

On appelle mouvement brownien de Dyson généralisé (GDBM) le processus $(\lambda_1^N(t), \ldots, \lambda_N^N(t))_{t\geq 0}$ vérifiant le système d'EDS

$$d\lambda_i^N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j\neq i} \frac{1}{\lambda_i^N(t) - \lambda_j^N(t)} dt - \frac{1}{2} V'(\lambda_i^N(t)) dt$$

$$
\begin{array}{ccc}
L_N(t) & \rightarrow & \mu_t \\
\downarrow & & \downarrow ? \\
L_N & \rightarrow & \mu_V
\end{array}
$$

où

$$L_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i^N}, \quad (\lambda_1^N, \ldots, \lambda_N^N) \sim \frac{1}{Z_N} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \exp\left(- \sum_{i=1}^{N} V(x_i) \right) dx_1 \ldots dx_N$$

et μ_V est la mesure d'équilibre associée au potentiel V, i.e. l'unique minimiseur de

$$\Sigma_V : \mu \mapsto - \iint_{\mathbb{R}^2} \ln |x-y| \, d\mu(x) d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} V(x) \, d\mu(x).$$

Résultats connus

- Pour V localement lipschtzien et croissant suffisamment vite à l'infini, existence et unicité sont bien comprises pour une condition initiale à support compact [Biane-Speicher 2001, Li-Li-Xie 2014].
- Le comportement asymptotique est bien compris dans le cas d'un potentiel V strictement convexe : il y a convergence vers μ_V en distance W_2, à vitesse exponentielle [potentiel quadratique traité par Biane-Speicher, V strictement convexe général par Li-Li-Xie].
- dans certains cas, la convergence vers μ_V n'est possible que si μ_0 a les mêmes fractions de remplissage que μ_V.

On s'est intéressé au potentiel quartique

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{c}{2}x^2$$

Comportement asymptotique pour $-2 \leq c$

Théorème

(Donati-Martin, Groux, M. 2016)
Soit $-2 \leq c$. On suppose que μ_0 est à support compact. Alors la solution $(\mu_t)_{t\geq 0}$ de l'équation de Fokker-Planck libre satisfait

$$\lim_{t\to+\infty} W_p(\mu_t, \mu_V) = 0$$

pour tout $p \geq 1$, avec μ_V donnée par

$$d\mu_V(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x^2 + b_0\right)\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)\,dx$$

où

$$a^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{c^2+12} - c\right), \qquad b_0 = \frac{1}{3}\left(c + \sqrt{\frac{c^2}{4} + 3}\right).$$

Un petit peu de probabilités libres

Le mouvement brownien libre est un processus $(s_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs auto-adjoints tel que

- pour tout $t \geq 0$, la distribution de s_t est la loi semi-circulaire centrée de variance t,
- les accroissements $s_t - s_u$, $0 \leq u \leq t$, sont libres et leur distribution est la loi semi-circulaire centrée de variance $t - u$.

$\rightarrow$ Théorie du calcul stochastique libre [Biane-Speicher], diffusions libres etc. par analogie avec la théorie $\ll$ classique $\gg$.

L'équation de Fokker-Planck libre

On peut considérer l'EDS libre

$$dx_t = ds_t - \frac{1}{2}V'(x_t)dt$$

où s est un mouvement brownien libre et V est un potentiel.

Proposition

Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ la solution de cette EDS libre. Si pour tout $t \geq 0$, μ_t désigne la loi de x_t, alors $(\mu_t)_{t\geq 0}$ satisfait l'équation de Fokker-Planck libre

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_t\left(\frac{1}{2}V' - H\mu_t\right)\right].$$

L'intérêt est qu'on a « gommé » la singularité.

Conséquence : bonnes propriétés de $\{\mu_t, t \geq 0\}$

Proposition

(Biane-Speicher) Soit $(\mu_t)_{t\geq 0}$ la solution de l'équation de Fokker-Planck libre issue d'une probabilité μ_0 à support compact.

- *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $supp(\mu_t) \subset [-M, M]$*
- *Il existe $K_1, K_2 > 0$ ne dépendant que de V tels que pour tout $t \geq 0$, la densité p_t de μ_t vérifie*

$$\|p_t\|_\infty \leq \frac{K_1}{\sqrt{t}} + K_2, \qquad \|D^{1/2} p_t\|_2 \leq \frac{K_1}{t} + K_2.$$

On en déduit que :

- l'entropie libre Σ_V est décroissante et continue le long des trajectoires
- toute valeur d'adhérence μ est à densité bornée et solution de l'équation d'Euler-Lagrange : $H\mu = \frac{1}{2} V'$ μ-p.p.

Mesure d'équilibre, mesures stationnaires, mesures critiques

Trois types de mesures :

- Mesure d'équilibre
  Minimiseur global de l'entropie libre Σ_V. Unique mesure pour laquelle il existe une constante C telle que
  - pour tout $z \in \mathrm{supp}(\mu)$, on a $U^\mu(z) + \frac{1}{2}V(z) = C$,
  - pour tout z hors de $\mathrm{supp}(\mu)$, on a $U^\mu(z) + \frac{1}{2}V(z) \geq C$,

  où $U^\mu(z) = -\int \ln|z-x|\, d\mu(x)$ désigne le potentiel logarithmique.
- Mesure stationnaire
  Solution de $H\mu = \frac{1}{2}V'$ μ-p.p., à densité bornée
- Mesure critique [Martínez-Finkelshtein Rakhnmanov, Kuijlaars-Silva etc.]

$$\forall h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ regulière}, \quad \lim_{s\to 0} \frac{\Sigma_V(\mu^{h,s}) - \Sigma_V(\mu)}{s} = 0.$$

Équivalence entre mesure critique et mesure stationnaire quand le support est réel.

Détermination des mesures stationnaires

Question : Dans le cas du potentiel quartique, la mesure d'équilibre est-elle la seule mesure stationnaire ?

Idée importante : tout repose sur la détermination du support.

Proposition

(Huybrechs-Kuijlaars-Lejon, Kuijlaars-Silva). Soient V un polynôme et μ une mesure critique pour Σ_V.

- *Il existe un polynôme R de degré $2\deg(V) - 2$ tel que*

$$R(z) = \left(\int \frac{1}{z-x}\,d\mu(x) + \frac{1}{2}V'(z)\right)^2$$

  De plus,

$$R(z) = \frac{1}{4}V'(z)^2 - \int_{\mathbb{R}} \frac{V'(x)-V'(z)}{x-z}\,d\mu(x).$$

- *Toute racine non réelle de R est de multiplicité paire.*
- *Le support de μ est une réunion finie d'intervalles reliant les zéros réels de R.*

Application au potentiel quartique

Pour le potentiel

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{c}{2}x^2$$

on a

$$R(z) = \frac{1}{4}z^6 + \frac{c}{2}z^4 + \frac{1}{4}(c^2 - 4)z^2 - \int x\, d\mu(x).z - \int x^2\, d\mu(x) - c\,.$$

Des arguments élémentaires permettent de conclure que pour $-2 \leq c$, toute mesure critique est à support connexe.

On a ensuite des outils analytiques pour montrer que la seule mesure critique à support connexe est la mesure d'équilibre, ce qui conclut la preuve.

Conclusion

On obtient un premier cas de convergence pour les milieux granulaires avec $\mathcal{V}$ à double puits et $\mathcal{W}$ singulier.

Perspectives :

- Description des mesures critiques pour $c < -2$?
- Description des bassins d'attraction pour $c < -2$?
- Généralisation de la méthode à d'autres potentiels ? (degré supérieur, dimension supérieure, potentiel cubique [Allez-Dumaz]...)
- Conjecture de Biane et Speicher pour le potentiel $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{g}{4}x^4$, avec $-\frac{1}{12} < g < 0$?

Merci de votre attention.