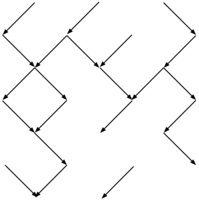
Quelques propriétés géometriques du Brownian net with killing .

Emmanuel Schertzer (LPMA Paris 6 — équipe SMILE @ Collège de France). Avec C.M. Newman et K. Ravishankar.

August 29, 2016

Modèle de percolation orientée en dimension $1+1$

- $b, k \geq 0$ avec $b + k \leq 1$.
- $\mathbb{Z}^{2,+}_{even} \; = \; \{(x,t) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; t > 0, \; x + t \;$ est pair$\}$.



$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\wedge) &= b \\ \mathbb{P}(\quad) &= k \\ \mathbb{P}(\diagup) = \mathbb{P}(\diagdown) &= \frac{1}{2}(1-b-k) \end{aligned}$$

- Modèle classique de percolation orientée en dimension $1+1$:

$$p \in [0,1], b = p^2 \text{ et } k = (1-p)^2. \tag{1}$$

Coloriage aléatoire d'une configuration

On définit un coloriage aléatoire des noeuds. Soit q le nombre de couleurs.

(1) On décore chaque $(x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$ avec une variable uniforme (sur $[0,1]$): $U_{x,t}$

(2) Coloriage des feuilles (feuilles = points de mort ou $(x,0)$):

$$\theta(x,t) = k \text{ ssi } U_{x,t} \in [\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}).$$

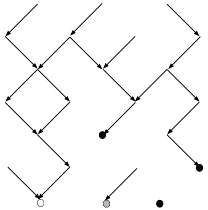
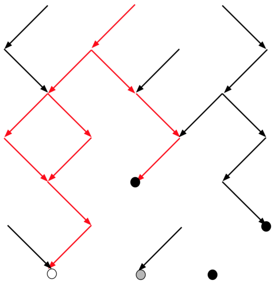


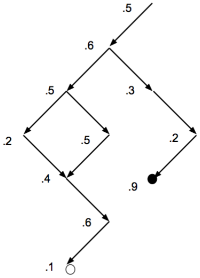
Figure: Coloring of the leaves ($q = 3$ colors (white, grey, black)).

(3) $\forall (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$, on considère le graphe orienté enraciné en (x,t). On colorie le graphe des feuilles jusqu'á la racine en suivant les règles suivantes:

- R1 Si z est connecté à 1 noeud, le noeud hérite de la couleur de son voisin.
- R2 Si z est connecté à 2 noeuds,
  - R.2.1 si les deux noeuds ont des couleurs $=$, le noeud hérite de la couleur.
  - R.2.2 si les deux noeuds ont des couleurs $\neq$,

$$\theta(z) = k \text{ iff } U_z \in [\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}).$$





(3) $\forall (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$, on considère le graphe orienté enraciné en (x,t). On colorie le graphe des feuilles jusqu'á la racine en suivant les règles suivantes:

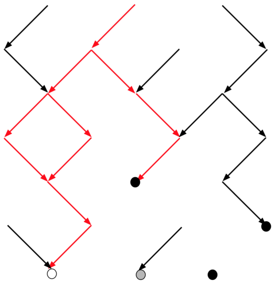
R1 Si z est connecté à 1 noeud, le noeud hérite de la couleur de son voisin.

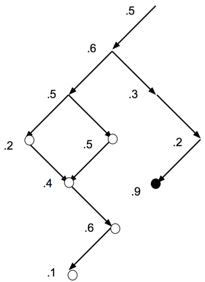
R2 Si z est connecté à 2 noeuds,

R.2.1 si les deux noeuds ont des couleurs $=$, le noeud hérite de la couleur.

R.2.2 si les deux noeuds ont des couleurs $\neq$,

$$\theta(z) = k \text{ iff } U_z \in [\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}).$$

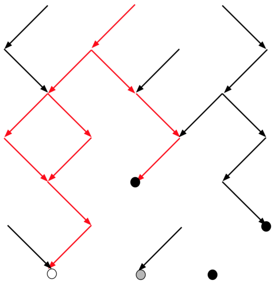


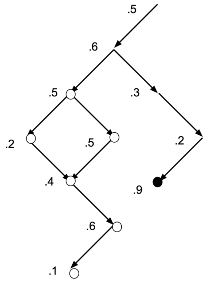


(3) $\forall (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$, on considère le graphe orienté enraciné en (x,t). On colorie le graphe des feuilles jusqu'á la racine en suivant les règles suivantes:

- R1 Si z est connecté à 1 noeud, le noeud hérite de la couleur de son voisin.
- R2 Si z est connecté à 2 noeuds,
  - R.2.1 si les deux noeuds ont des couleurs $=$, le noeud hérite de la couleur.
  - R.2.2 si les deux noeuds ont des couleurs $\neq$,

$$\theta(z) = k \text{ iff } U_z \in [\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}).$$





(3) $\forall (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$, on considère le graphe orienté enraciné en (x,t). On colorie le graphe des feuilles jusqu'á la racine en suivant les règles suivantes:

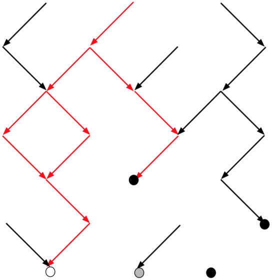
R1 Si z est connecté à 1 noeud, le noeud hérite de la couleur de son voisin.

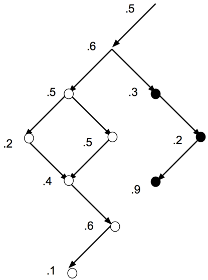
R2 Si z est connecté à 2 noeuds,

R.2.1 si les deux noeuds ont des couleurs $=$, le noeud hérite de la couleur.

R.2.2 si les deux noeuds ont des couleurs $\neq$,

$$\theta(z) = k \text{ iff } U_z \in [\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}).$$

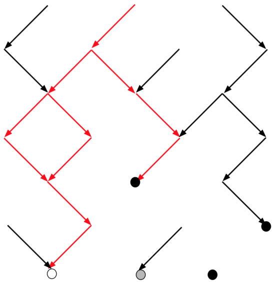


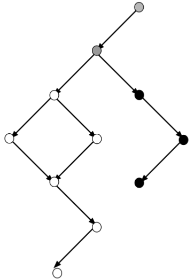


(3) $\forall (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$, on considère le graphe orienté enraciné en (x,t). On colorie le graphe des feuilles jusqu'á la racine en suivant les règles suivantes:

- R1 Si z est connecté à 1 noeud, le noeud hérite de la couleur de son voisin.
- R2 Si z est connecté à 2 noeuds,
  - R.2.1 si les deux noeuds ont des couleurs $=$, le noeud hérite de la couleur.
  - R.2.2 si les deux noeuds ont des couleurs $\neq$,

$$\theta(z) = k \text{ iff } U_z \in [\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}).$$

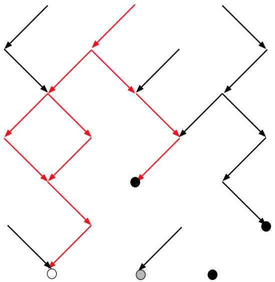


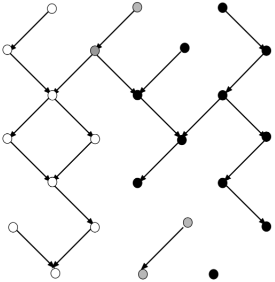


(3) $\forall (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$, on considère le graphe orienté enraciné en (x,t). On colorie le graphe des feuilles jusqu'á la racine en suivant les règles suivantes:

- R1 Si z est connecté à 1 noeud, le noeud hérite de la couleur de son voisin.
- R2 Si z est connecté à 2 noeuds,
  - R.2.1 si les deux noeuds ont des couleurs $=$, le noeud hérite de la couleur.
  - R.2.2 si les deux noeuds ont des couleurs $\neq$,

$$\theta(z) = k \text{ iff } U_z \in [\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}).$$





Graphe réduit

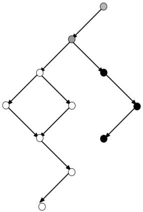
- Soit $(x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$ et soit z un point de branchement du graphe enraciné en (x,t).
- z est dit (x,t)-significatif ssi il existe deux chemins π_1, π_2 partant de z et qui se séparent jusqu'aux feuilles.

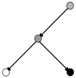
Définition (Graphe réduit)

Graphe induit sur la racine, les feuilles et les points significatifs.

Lemme

La couleur de la racine ne change pas si on applique l'algorithme de coloriage sur le graphe réduit.





Graphe réduit

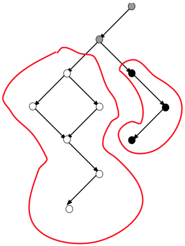
- Soit $(x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even}$ et soit z un point de branchement du graphe enraciné en (x,t).
- z est dit (x,t)-significatif ssi il existe deux chemins π_1, π_2 partant de z et qui se séparent jusqu'aux feuilles.

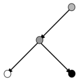
Définition (Graphe réduit)

Graphe induit sur la racine, les feuilles et les points significatifs.

Lemme

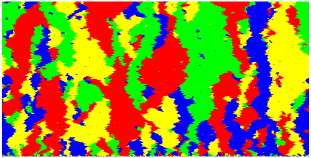
La couleur de la racine ne change pas si on applique l'algorithme de coloriage sur le graphe réduit.





Simulations

$$q = 4, \;\; b_\epsilon \; = \frac{q}{2}\epsilon, \;\; k_\epsilon \; = q\epsilon^2$$
$$\epsilon << 1, \;\; S_\epsilon(x,t) = (x\epsilon, t\epsilon^2).$$



Proposition (Newman, Ravishankar, S.)

On définit la chaîne de Markov sur $\{1, \cdots, q\}^{\mathbb{Z}}$:

$$\eta_t(x) = \begin{cases} \theta(x,t) & = & \theta(x,t) \text{ if } (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{even} \\ \theta(x,t) & = & \theta(x,t-1) \text{ if } (x,t) \in \mathbb{Z}^{2,+}_{odd} \end{cases}$$

$(\eta_t; t \geq 0)$ est un modèle stochastique de Potts à q couleurs et à température inverse $-\ln(\epsilon)$
(i.e., m.c. reversible p.r. à la mesure de Gibbs avec Hamiltonien formel $H(\eta) = \sum_x \eta(x) \neq \eta(x-1)$).

Limite d'échelle à basse température

Deux couches d'aleas:

1. percolation $1+1$ parametrisé par b, k.
2. coloriage aléatoire de la configuration.

On considère ce modèle dans la gamme de paramètres:

$$b_\epsilon/\epsilon \to b, \;\; k_\epsilon/\epsilon^2 \to k$$

Q1) Existe-t-il une limite d'echelle au modèle de percolation ?

Q2) Existe-t-il un coloriage aléatoire de la configuration continue analogue au niveau discret ?

Limite d'echelle du modèle percolatif: the Brownian net with killing

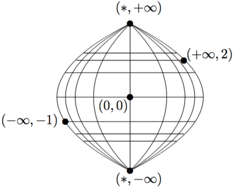
- Limite d'échelle (diffusive) de notre modèle de percolation lorsque

$$b_\epsilon/\epsilon \to b, \;\; k_\epsilon/\epsilon^2 \to k, \;\; S_\epsilon(x,t) = (x\epsilon, t\epsilon^2)$$

- $\mathcal{U}^{b_\epsilon,k_\epsilon}$ = ensemble des chemins qui partent de tous les points du réseau et qui s'étendent jusqu'aux feuilles.
- On définit une métrique d sur l'ensemble des chemins.

Lemme

$\mathcal{U}^{b_\epsilon,k_\epsilon}$ est un ensemble compact.



$\mathcal{H} = \{$ensemble compacts de chemins$\}$
$d_{\mathcal{H}}$= distance de Gromov-Hausdorf:

$$d_{\mathcal{H}}(K_1, K_2) = \sup_{\pi_1 \in K_1} \inf_{\pi_2 \in K_2} d(\pi_1, \pi_2) \ \vee \ \sup_{\pi_2 \in K_2} \inf_{\pi_1 \in K_1} d(\pi_1, \pi_2),$$

Theorem (Newman, Ravishnakar, S.)

Soit $\mathcal{U}^{b_\epsilon, k_\epsilon}$ l'ensemble des chemins du modèle de percolation avec

$$b_\epsilon / \epsilon \to b, \ \ k_\epsilon / \epsilon^2 \to k,$$

Il existe un v.a. $\mathcal{N}^{b,k}$ (Brownian net with killing) à valeur dans $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ telle que

$$S_\epsilon(\mathcal{U}^{b_\epsilon, k_\epsilon}) \implies \mathcal{N}^{b,k}, \ \ \text{avec} \ \ S_\epsilon(x,t) = (x\epsilon, t\epsilon^2)$$

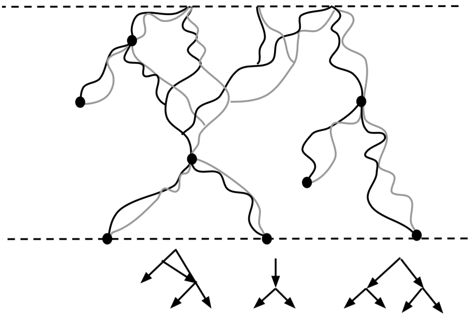
- $b = k = 0$: Brownian web (Toth, Werner; Fontes, Isopi, Newman, Ravishankar).
- $k = 0$: Brownian net (Sun, Swart; Newman, Ravishankar, S.)

Quelques propriétés de l'objet limite

Proposition (Newman, Ravishankar, S.)

Let $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

- $\exists$ une infinité de chemins partant du point (x,t).
- L'ensemble des feuilles (i.e., $\{(y,0)\ :\ \exists \pi \in \mathcal{N}^{b,k}$ s.t. $\pi(x)=t,\ \pi(0)=y\}$ et $\{(y,s)\ :\ \exists \pi \in \mathcal{N}^{b,k}$ s.t. $\pi(x)=t,\ \pi(t)=y,\ e_\pi=s\}$) est fini p.s..
- z est (x,t)-significatif ssi $\exists\ \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{N}^{b,k}$ partant de z et qui se séparent jusqu'aux feuilles. L'ensemble des points (x,t)-significatifs est fini p.s..



Conclusion

Theorème (Newman, Ravishankar, S.)

- (Coarsening) Pour tout t, la section horizontale $\mathbb{R} \times \{t\}$ est partitionée en segments monochromes dont le nombre est localement fini.
- Si $b_\epsilon/\epsilon \to b, \;\; k_\epsilon/\epsilon^2 \to k,$ et si $z_i^\epsilon \in S_\epsilon(\mathbb{Z}^{2,+}_{even})$ tels que $z_i^\epsilon \to z_i$. Alors:

$$\{\theta^\epsilon(z_i^\epsilon)\}_{i=1}^n \to \{\theta(z_i)\}_{i=1}^n.$$

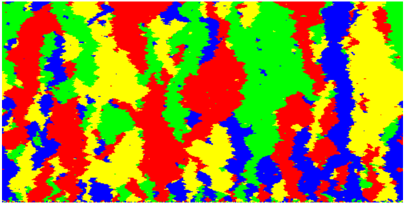


Figure: courtesy of J. Swart

Merci !