Couplage par le Passé

Accélérer l'échantillonnage pour le modèle des gaz à cœurs durs

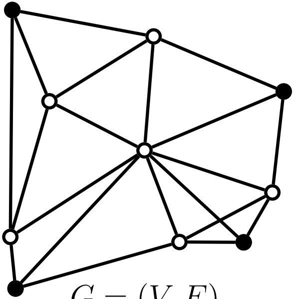
Rémi Varloot[1,2] Ana Bušić[1] Anne Bouillard[1]

[1]Dyogene (Inria Paris — ÉNS de Paris)

[2]Infine (Microsort Research — Inria Saclay)

29 août, 2016

Le modèle à cœurs durs



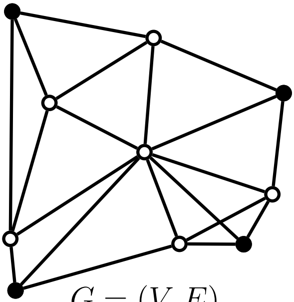
$G = (V, E)$

Ensembles indépendants

$I \subseteq V$ tq $\forall u, v \in I, (u, v) \notin E$

L'ensemble des ensembles indépendants se note $\mathcal{I}$.

Le modèle à cœurs durs



$G = (V, E)$

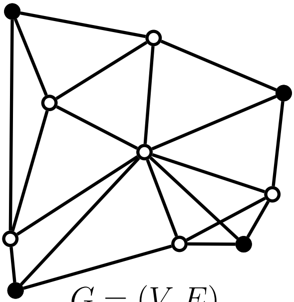
Ensembles indépendants

$I \subseteq V$ tq $\forall u, v \in I, (u, v) \notin E$

L'ensemble des ensembles indépendants se note $\mathcal{I}$.

Objectif : Tirer un élément de $\mathcal{I}$ uniformément au hasard.

Le modèle à cœurs durs



$G = (V, E)$

Ensembles indépendants

$$I \subseteq V \text{ tq } \forall u, v \in I, (u, v) \notin E$$

L'ensemble des ensembles indépendants se note $\mathcal{I}$.

Objectif : Tirer un élément de $\mathcal{I}$ selon la distribution

$$\pi_\lambda(I) = \frac{\lambda^{|I|}}{Z_\lambda}. \qquad \lambda \text{ : fugacité}$$

Un peu de recul

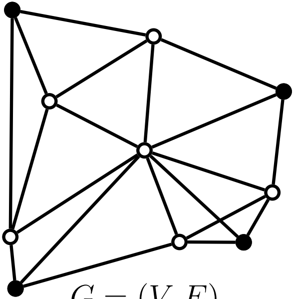
Le calcul de Z_1, le nombre d'ensembles indépendants, est un problème $\sharp$P-complet.

- Pas de méthode « directe ».

Il n'existe pas de schéma d'approximation en temps polynomial pour l'ensemble indépendant maximal à un facteur de moins de $O(n^{1-\varepsilon})$ (sauf si P = NP).

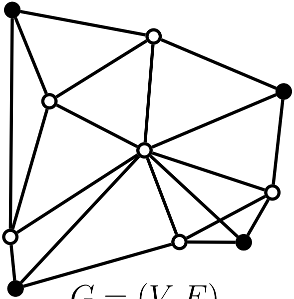
- Complexité exponentielle lorsque λ est grand.

Dynamique de Glauber



$G = (V, E)$

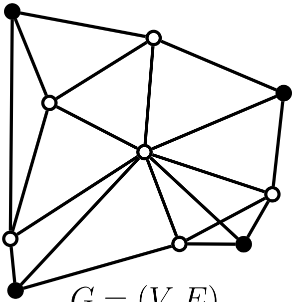
Dynamique de Glauber



$G = (V, E)$

- Choisir $v \in V$ uniformément au hasard
- Avec probabilité $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ (v^+)
  - si $I + v \in \mathcal{I}$
    $I \leftarrow I + v$
  - sinon rien ne change
- Sinon, $I \leftarrow I - v$ (v^-)

Dynamique de Glauber



$G = (V, E)$

- Choisir $v \in V$ uniformément au hasard
- Avec probabilité $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ $\quad (v^+)$
  - si $I + v \in \mathcal{I}$
    $I \leftarrow I + v$
  - sinon rien ne change
- Sinon, $I \leftarrow I - v$ $\quad (v^-)$

La chaîne de Markov définie à partir de cette dynamique converge vers la distribution

$$\pi_\lambda(I) = \frac{\lambda^{|I|}}{Z_\lambda}.$$

Combattre la complexité

Taille de l'espace d'état : *a priori* $\Theta(2^{|V|})$.

Combattre la complexité

Taille de l'espace d'état : *a priori* $\Theta(2^{|V|})$.

Les chaînes bornantes

- Il s'agit d'une chaîne de Markov dont les transitions sont couplées avec la chaîne initiale.
- Chaque état de la chaîne bornante englobe des états de la chaîne initiale.

Combattre la complexité

Taille de l'espace d'état : *a priori* $\Theta(2^{|V|})$.

Les chaînes bornantes

- Il s'agit d'une chaîne de Markov dont les transitions sont couplées avec la chaîne initiale.
- Chaque état de la chaîne bornante englobe des états de la chaîne initiale.

Exemple 1 : diagrammes

Combattre la complexité

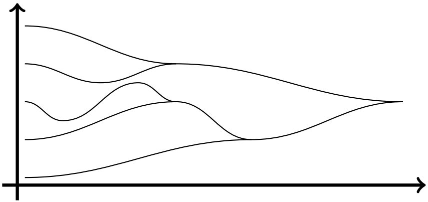
Taille de l'espace d'état : *a priori* $\Theta(2^{|V|})$.

Les chaînes bornantes

- Il s'agit d'une chaîne de Markov dont les transitions sont couplées avec la chaîne initiale.
- Chaque état de la chaîne bornante englobe des états de la chaîne initiale.

Exemple 2 : monotonie

$$X_i \leq Y_i \Rightarrow X_{i+1} \leq Y_{i+1}$$



Combattre la complexité

Taille de l'espace d'état : *a priori* $\Theta(2^{|V|})$.

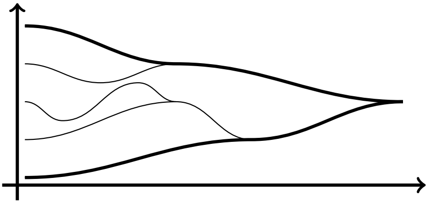
Les chaînes bornantes

- Il s'agit d'une chaîne de Markov dont les transitions sont couplées avec la chaîne initiale.
- Chaque état de la chaîne bornante englobe des états de la chaîne initiale.

Exemple 2 : monotonie

$$X_i \leq Y_i \Rightarrow X_{i+1} \leq Y_{i+1}$$

$$\left(\left(X_i^{(m)}, X_i^{(M)}\right)\right)_{i \in \mathbb{N}}$$



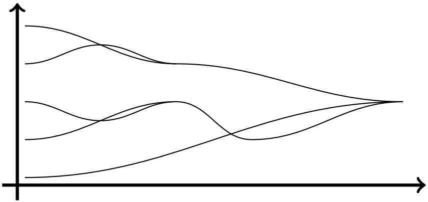
Combattre la complexité

Taille de l'espace d'état : *a priori* $\Theta(2^{|V|})$.

Les chaînes bornantes

- Il s'agit d'une chaîne de Markov dont les transitions sont couplées avec la chaîne initiale.
- Chaque état de la chaîne bornante englobe des états de la chaîne initiale.

Exemple 3 : enveloppe



Combattre la complexité

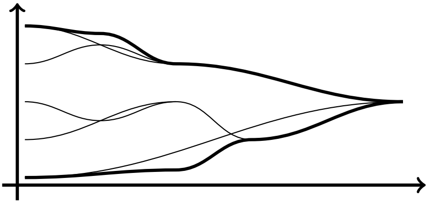
Taille de l'espace d'état : *a priori* $\Theta(2^{|V|})$.

Les chaînes bornantes

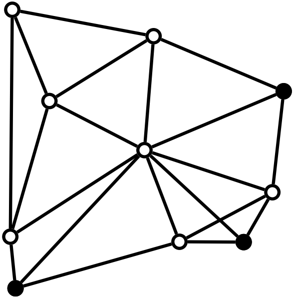
- Il s'agit d'une chaîne de Markov dont les transitions sont couplées avec la chaîne initiale.
- Chaque état de la chaîne bornante englobe des états de la chaîne initiale.

Exemple 3 : enveloppe

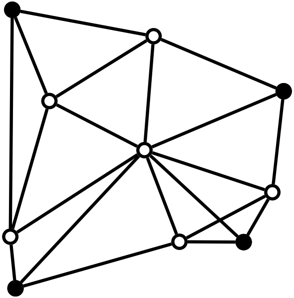
$$((L_i, U_i))_{i\in\mathbb{N}}$$



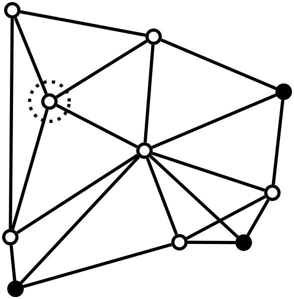
Monotonie ?



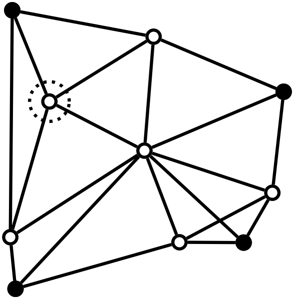
$\subseteq$



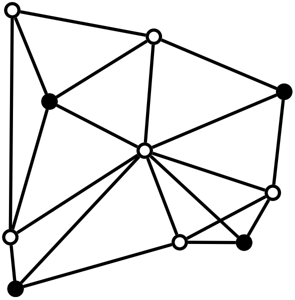
Monotonie ?



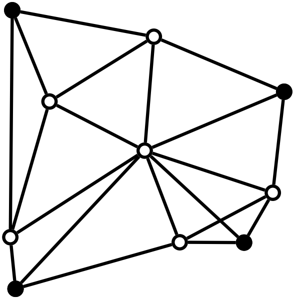
$\subseteq$



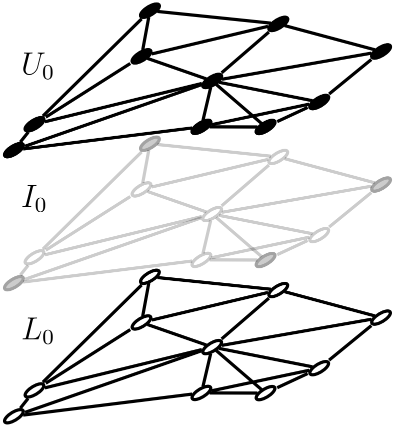
Monotonie ?



$\not\subseteq$

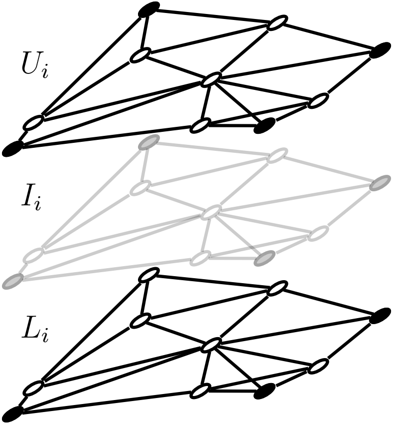


Enveloppe



$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \| & & & & \| \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

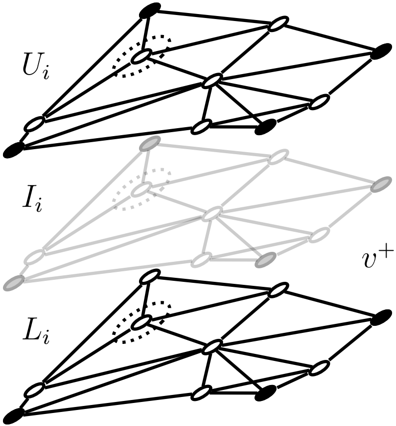
Enveloppe



$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \parallel & & & & \parallel \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

$$L_i \subseteq I_i \subseteq U_i$$
$$\Downarrow$$
$$L_{i+1} \subseteq I_{i+1} \subseteq U_{i+1}$$

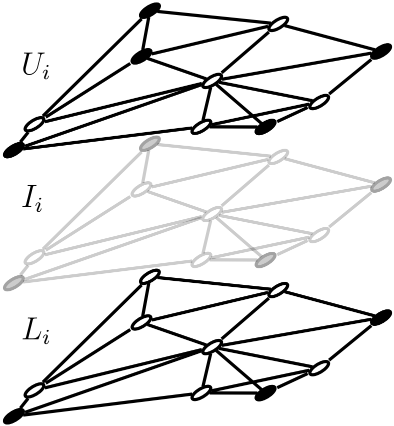
Enveloppe



$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \| & & & & \| \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

$$L_i \subseteq I_i \subseteq U_i$$
$$\Downarrow$$
$$L_{i+1} \subseteq I_{i+1} \subseteq U_{i+1}$$

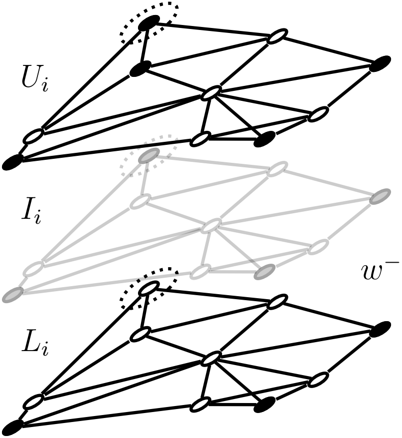
Enveloppe



$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \parallel & & & & \parallel \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

$$L_i \subseteq I_i \subseteq U_i$$
$$\Downarrow$$
$$L_{i+1} \subseteq I_{i+1} \subseteq U_{i+1}$$

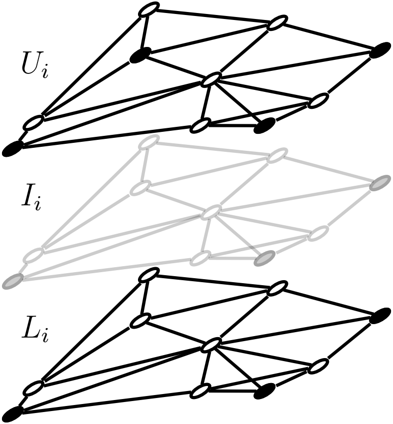
Enveloppe



$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \parallel & & & & \parallel \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

$$L_i \subseteq I_i \subseteq U_i$$
$$\Downarrow$$
$$L_{i+1} \subseteq I_{i+1} \subseteq U_{i+1}$$

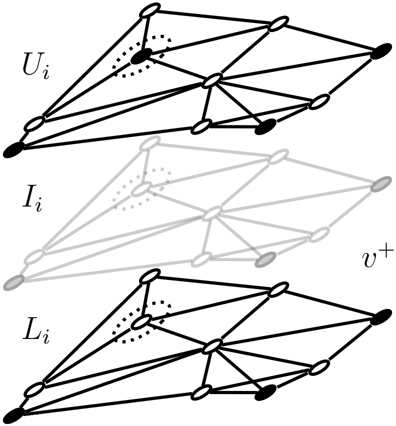
Enveloppe



$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \| & & & & \| \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

$$\begin{array}{c} L_i \subseteq I_i \subseteq U_i \\ \Downarrow \\ L_{i+1} \subseteq I_{i+1} \subseteq U_{i+1} \end{array}$$

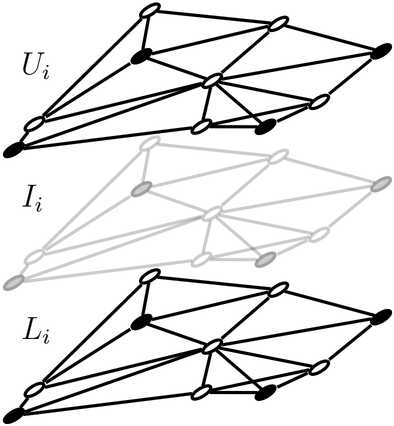
Enveloppe



$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \parallel & & & & \parallel \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

$$L_i \subseteq I_i \subseteq U_i$$
$$\Downarrow$$
$$L_{i+1} \subseteq I_{i+1} \subseteq U_{i+1}$$

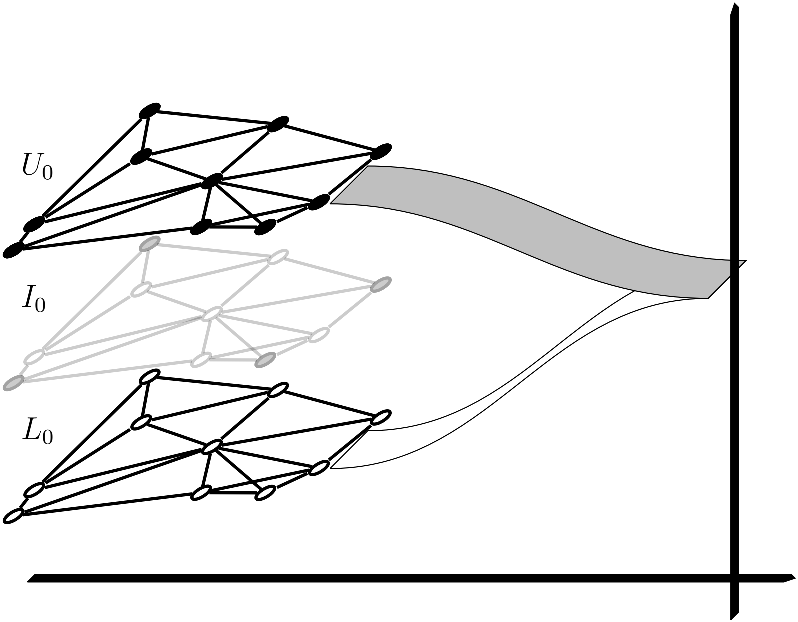
Enveloppe



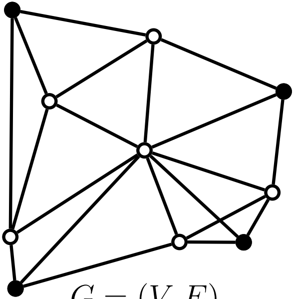
$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \subseteq & I_0 & \subseteq & U_0 \\ \| & & & & \| \\ \varnothing & & & & V \end{array}$$

$$L_i \subseteq I_i \subseteq U_i$$
$$\Downarrow$$
$$L_{i+1} \subseteq I_{i+1} \subseteq U_{i+1}$$

Enveloppe



Événements passifs

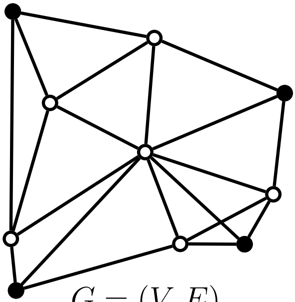


$G = (V, E)$

Événement passif

Événement ne modifiant pas l'état de la chaîne

Événements passifs



$G = (V, E)$

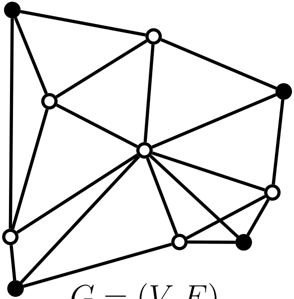
Événement passif

Événement ne modifiant pas l'état de la chaîne

Dynamique de Glauber

- v^- avec $v \notin I$
- v^+ avec $v \in I$
- v^+ avec $(v, w) \in E$ et $w \in I$

Événements passifs



$G = (V, E)$

Événement passif

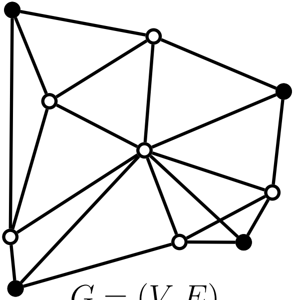
Événement ne modifiant pas l'état de la chaîne

Dynamique de Glauber

- v^- avec $v \notin I$
- v^+ avec $v \in I$
- v^+ avec $(v, w) \in E$ et $w \in I$

En pratique : pour des valeurs de λ excentrées, la probabilité d'obtenir un évènement passif est forte.

Événements passifs



$G = (V, E)$

Événement passif

Événement ne modifiant pas l'état de la chaîne

Dynamique de Glauber

- v^- avec $v \notin I$
- v^+ avec $v \in I$
- v^+ avec $(v, w) \in E$ et $w \in I$

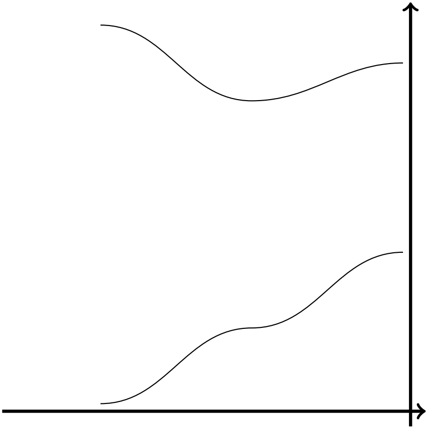
En pratique : pour des valeurs de λ excentrées, la probabilité d'obtenir un évènement passif est forte.

Objectif : Tirer uniquement des événements « actifs » afin d'accélérer le mélange de la chaîne.

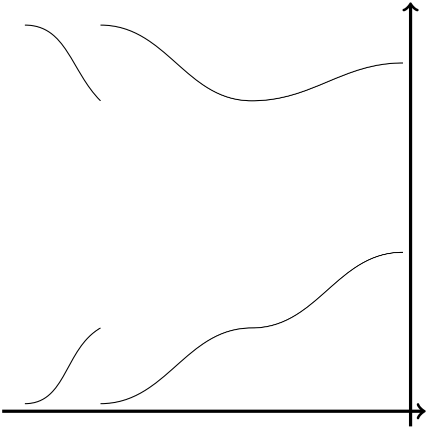
Impact sur la distribution stationnaire

- Changer la dynamique modifie la distribution stationnaire.
- Dans le cadre de MCMC, il suffit de compter les événements passifs « évités » entre deux événements actifs (distribution géométrique)
- Pour CFTP, ça se complique…

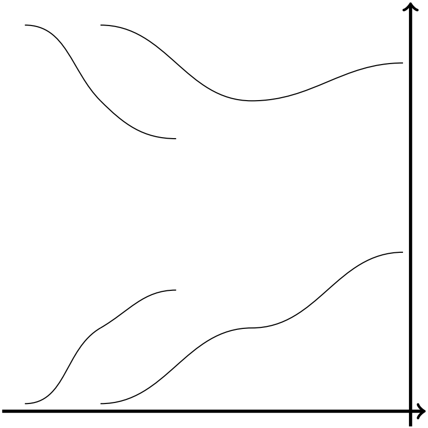
Passif/actif : l'importance du contexte



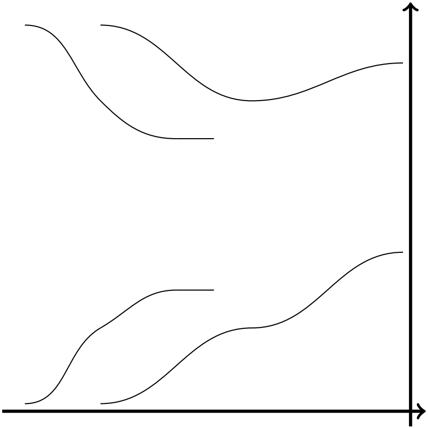
Passif/actif : l'importance du contexte



Passif/actif : l'importance du contexte

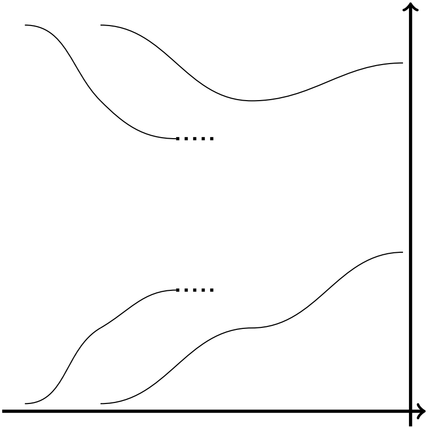


Passif/actif : l'importance du contexte



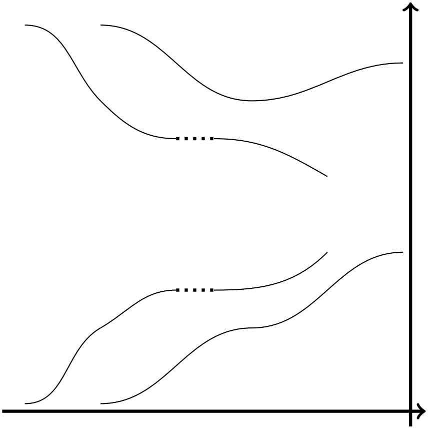
Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique



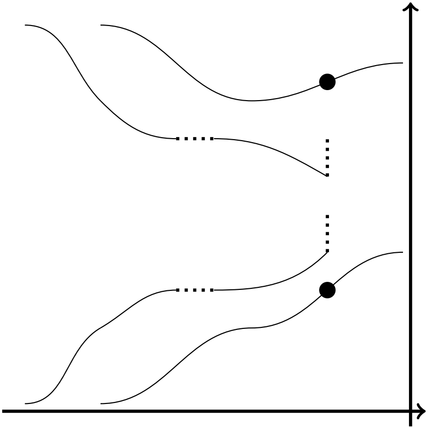
Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique



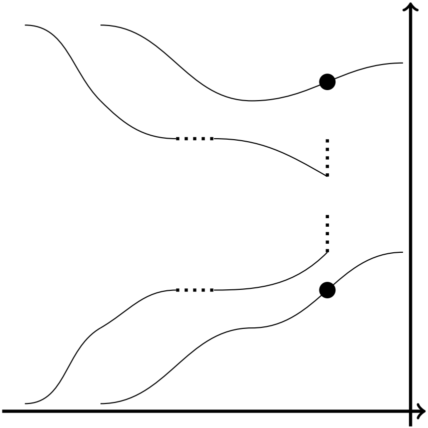
Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique



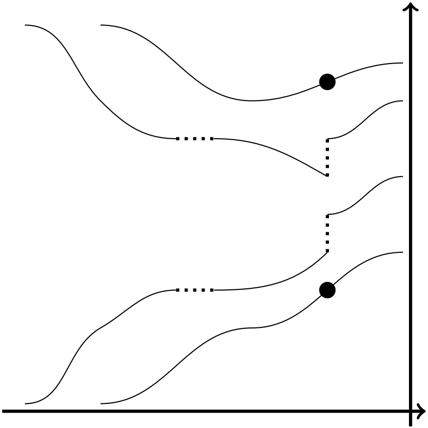
Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique
- Ajout dynamique



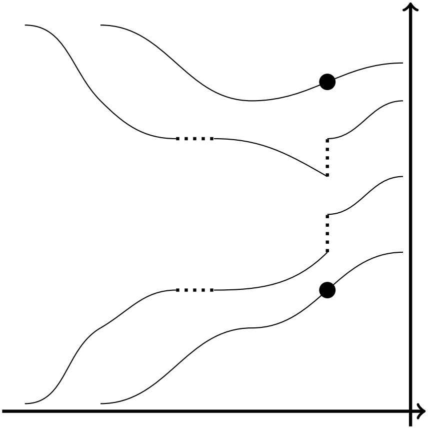
Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique
- Ajout dynamique



Passif/actif : l'importance du contexte

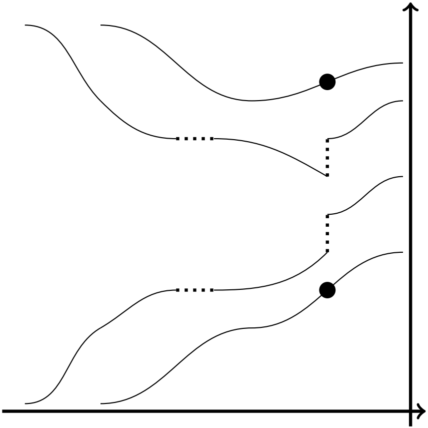
- Suppression dynamique
- Ajout dynamique



Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique
- Ajout dynamique

Pour dérouler la Preuve de Propp & Wilson

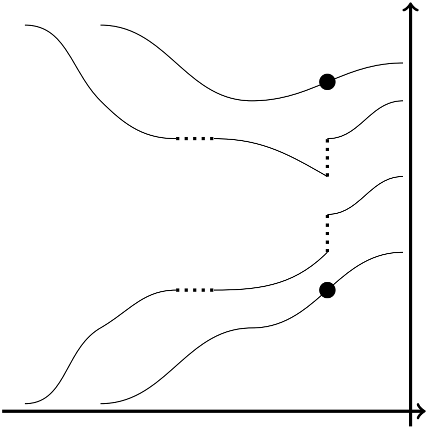


Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique
- Ajout dynamique

Pour dérouler la Preuve de Propp & Wilson

- Principe d'inclusion

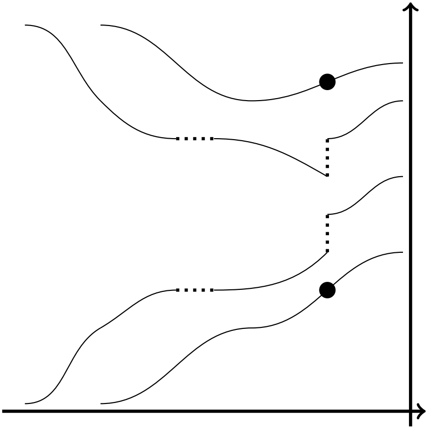


Passif/actif : l'importance du contexte

- Suppression dynamique
- Ajout dynamique

Pour dérouler la Preuve de Propp & Wilson

- Principe d'inclusion
- Après k itérations, rajouter les événements passifs donne une suite de transitions i.i.d.



Merci !