Le milieu aléatoire d'une marche aléatoire renforcée, caractérisation

Journée MAS 2016, Grenoble

Xiaolin Zeng (en collaboration avec C.Sabot)

Le 31 Août 2016

Motivation

Pourquoi étudier le processus de saut renforcés par sites (Vertex reinforced jump process Aka. VRJP) ?

Motivation

Pourquoi étudier le processus de saut renforcés par sites (Vertex reinforced jump process Aka. VRJP) ?

1. Une marche aléatoire en auto-interaction ayant son propre interêt.

Motivation

Pourquoi étudier le processus de saut renforcés par sites (Vertex reinforced jump process Aka. VRJP) ?

1. Une marche aléatoire en auto-interaction ayant son propre interêt.
2. Une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)

Motivation

Pourquoi étudier le processus de saut renforcés par sites (Vertex reinforced jump process Aka. VRJP) ?

1. Une marche aléatoire en auto-interaction ayant son propre interêt.
2. Une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)
3. Il est relié au phénomène : Localisation d'Anderson [Livre de Aizenmannn& Warzel]

Motivation

Pourquoi étudier le processus de saut renforcés par sites (Vertex reinforced jump process Aka. VRJP) ?

1. Une marche aléatoire en auto-interaction ayant son propre interêt.
2. Une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)
3. Il est relié au phénomène : Localisation d'Anderson [Livre de Aizenmannn& Warzel]
4. Il est relié au théorème de Matsumoto-Yor (qui généralise celui de Pitman's $2M - B$) [Bourgade : Marc Yor et matrice aléatoire]

Le processus de saut renforcés par sites (aka. VRJP pour vertex reinforced jump process) : Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un bon graphe fini, non orienté, à chaque arête $\{i, j\}$ on associe un réel $W_{i,j} > 0$, appelé sa conductance.

Le processus de saut renforcés par sites (aka. VRJP pour vertex reinforced jump process) : Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un bon graphe fini, non orienté, à chaque arête $\{i, j\}$ on associe un réel $W_{i,j} > 0$, appelé sa conductance.

Le VRJP $(Y_t)_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{G}, W)$ partant de $i_0 \in V$ est un processus à valeur dans V, tel que,

Le processus de saut renforcés par sites (aka. VRJP pour vertex reinforced jump process) : Définition

Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un bon graphe fini, non orienté, à chaque arête $\{i, j\}$ on associe un réel $W_{i,j} > 0$, appelé sa conductance.

Le VRJP $(Y_t)_{t\geq 0}$ sur $(\mathcal{G}, W)$ partant de $i_0 \in V$ est un processus à valeur dans V, tel que, au temps t, il saute de i vers j à taux

$$\mathbb{P}(Y_{t+dt} = j | \mathcal{F}_t, Y_t = i) = W_{i,j} L_j(t) dt$$

où $L_j(t)$ est le temps local de site i au temps t défini par

$$L_j(t) = 1 + \int_0^t \mathbb{1}_{Y_s = j} ds.$$

Le VRJP est une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)

Le VRJP est une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)

Soit $\mathbb{P}_{i_0}^{W}$ la loi du VRJP partant de i_0 à conductance W. On note, se donnant $(u_i)_{i\in V} \in \mathbb{R}^V$, $P_{i_0}^{u}$ la loi du processus Markovien saut de i vers j à taux $W_{i,j}e^{u_j-u_i}$ pour toute (i,j).

Le VRJP est une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA)

Soit $\mathbb{P}_{i_0}^W$ la loi du VRJP partant de i_0 à conductance W. On note, se donnant $(u_i)_{i\in V} \in \mathbb{R}^V$, $P_{i_0}^u$ la loi du processus Markovien saut de i vers j à taux $W_{i,j}e^{u_j-u_i}$ pour toute (i,j).

Théorème (Sabot & Tarrès 2011)

Il existe une loi de probabilité $\mathcal{Q}_{i_0}^W$ sur l'espace

$$\{(u_i)_{i\in V} : u_i \in \mathbb{R}, \forall i \in V,\ \sum_i u_i = 0\}$$

avec une densité explicite (qu'on n'écrit pas) telle que

$$\mathbb{P}_{i_0}^W(\cdot) = \int P_{i_0}^u(\cdot)\mathcal{Q}_{i_0}^W(du).$$

Le milieu aléatoire de VRJP, sous une forme plus agréable

Le milieu aléatoire de VRJP, sous une forme plus agréable

Le vecteur aléatoire $(u_i)_{i\in V}$ suivant la loi $\mathcal{Q}_{i_0}^{W}(du)$ peut être caractérisé par un vecteur aléatoire $\{\beta_i \geq 0, i \in V\}$ de loi $\nu^W(d\beta)$, toujours avec une densité explicite (qu'on n'écrit toujours pas puisque ça vous fera peur),

Le milieu aléatoire de VRJP, sous une forme plus agréable

Le vecteur aléatoire $(u_i)_{i\in V}$ suivant la loi $\mathcal{Q}_{i_0}^W(du)$ peut être caractérisé par un vecteur aléatoire $\{\beta_i \geq 0, i \in V\}$ de loi $\nu^W(d\beta)$, toujours avec une densité explicite (qu'on n'écrit toujours pas puisque ça vous fera peur), tel que la transformée de Laplace est

$$\mathbb{E}_{\nu^W}(e^{-\langle \lambda,\beta\rangle}) = \exp\left(-\sum_{\{i,j\}\in E} W_{i,j}\left(\sqrt{(1+\lambda_i)(1+\lambda_j)}-1\right)\right)\prod_{i\in V}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i}}$$

Le milieu aléatoire de VRJP, sous une forme plus agréable

Le vecteur aléatoire $(u_i)_{i\in V}$ suivant la loi $\mathcal{Q}_{i_0}^W(du)$ peut être caractérisé par un vecteur aléatoire $\{\beta_i \geq 0, i \in V\}$ de loi $\nu^W(d\beta)$, toujours avec une densité explicite (qu'on n'écrit toujours pas puisque ça vous fera peur), tel que la transformée de Laplace est

$$\mathbb{E}_{\nu^W}(e^{-\langle\lambda,\beta\rangle}) = \exp\left(-\sum_{\{i,j\}\in E} W_{i,j}(\sqrt{(1+\lambda_i)(1+\lambda_j)}-1)\right)\prod_{i\in V}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i}}$$

$(\beta_i)_{i\in V}$ généralise la loi Inverse-gaussienne : pour un site i, la loi marginal $\frac{1}{2\beta_i}$ est de loi Inverse-gaussienne $(\frac{1}{W_i}, 1)$ (où $W_i = \sum_{j\sim i} W_{i,j}$), c'est à dire que

$$\mathbb{E}(e^{-k\beta_i}) = \exp\left(-W_i(\sqrt{1+k}-1)\right)\frac{1}{\sqrt{1+k}}$$

Caractérisation de la loi Inverse Gaussian via Brownien

La loi Inverse-gaussienne est de nombreux applications en statistiques, Folks and Chhikara 1978.

Caractérisation de la loi Inverse Gaussian via Brownien

La loi Inverse-gaussienne est de nombreux applications en statistiques, Folks and Chhikara 1978.

Soit $W > 0$ et B_t un mouvement Brownien standard, soit T le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0, B_t + Wt = 1\}.$$

Caractérisation de la loi Inverse Gaussian via Brownien

La loi Inverse-gaussienne est de nombreux applications en statistiques, Folks and Chhikara 1978.

Soit $W > 0$ et B_t un mouvement Brownien standard, soit T le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0, B_t + Wt = 1\}.$$

Une application du théorème de Girsanov et théorème d'arrêt nous dit que, pour tout $k > 0$

$$\mathbb{E}(e^{-\frac{k}{2T}}) = \exp\left(-W(\sqrt{1+k} - 1)\right)\frac{1}{\sqrt{1+k}}.$$

Le moral maintenant...

En comparant ces deux transformé de Laplace, on voit que le marginal de $\nu^W(d\beta)$ a la propriété : $\frac{1}{2\beta_i}$ égale en loi au temps d'atteint à 0 d'un mouvement Brownian avec dérive W_i partant de 1.

Le moral maintenant...

En comparant ces deux transformé de Laplace, on voit que le marginal de $\nu^W(d\beta)$ a la propriété : $\frac{1}{2\beta_i}$ égale en loi au temps d'atteint à 0 d'un mouvement Brownian avec dérive W_i partant de 1.

Comme β est la généralisation de la loi Inverse Gaussian en dimension $|V|$, on pourra imaginer que :

Le moral maintenant...

En comparant ces deux transformé de Laplace, on voit que le marginal de $\nu^W(d\beta)$ a la propriété : $\frac{1}{2\beta_i}$ égale en loi au temps d'atteint à 0 d'un mouvement Brownian avec dérive W_i partant de 1.

Comme β est la généralisation de la loi Inverse Gaussian en dimension $|V|$, on pourra imaginer que :

Il existe une sorte de martingale brownienne multidimensionnel $X_t^{(i)}$ (partant de 1) avec interaction (une dérive décrite par W) telle que, si on note T_i le temps d'atteint à 0 de $X_t^{(i)}$, le vecteur $(\frac{1}{2T_i})_{i\in V}$ suit la loi $\nu^W(d\beta)$.

Théorème : C’est vrai.

Le théorème de caractérisation

Théorème (Sabot & Z. 16)

Soit P l'opérateur qui a, pour $f : V \to \mathbb{R}$,

$$(Pf) : V \to \mathbb{R}, i \mapsto \sum_{j:j\sim i} W_{i,j} f(j).$$

Soit $K_t = Id - tP$, l'EDS matricielle (où $T_i = \inf\{t \geq 0, X_t^{(i)} = 0\}$)

$$dX_t = \mathbb{1}_{t<T} dB_t - \mathbb{1}_{t<T}(PK_{t\wedge T}^{-1} X_t)dt$$

avec condition initiale $X = 1$ admet unique solution, et le vecteur $\frac{1}{2T} = (\frac{1}{2T_i})_{i\in V}$ suit la loi $\nu^W(d\beta)$. De plus, conditionné à T, $X_t^{(i)}$ sont des ponts de Bessel de dimension 3 de 1 à 0.

Ce n’est pas la fin d’histoire mais c’est la fin de l’exposé, merci.

Densité de β pour les courageurs

Soit $V = \{1, \dots, n\}$ et

$$H_\beta = \begin{pmatrix} 2\beta_1 & -W_{1,2} & \cdots & -W_{1,n} \\ -W_{2,1} & 2\beta_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -W_{n,1} & \cdots & \cdots & 2\beta_n \end{pmatrix} = 2\beta - P$$

La densité de $\nu^W(d\beta)$ est

$$\mathbb{1}_{H_\beta > 0} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \beta_i + \sum_{i \sim j} W_{i,j} \right) \frac{1}{\sqrt{\det H_\beta}}$$